THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

par **Etienne Dubourg**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Contribution à la théorie des langages de tuiles

Date de soutenance : 12 Juillet 2016

Devant la commission d'examen composée de :

David Janin	Maître de Conférence (Bdx INP)	Directeur de thèse
Olivier Serre	Chargé de Recherche (CNRS)	Rapporteur
Florent Jacquemard	Chargé de Recherche (Inria)	Rapporteur
Géraud Sénizergues	Professeur (U Bordeaux)	Examinateur
Marc Zeitoun	Professeur (U Bordeaux)	Examinateur
Mark V. Lawson	Professeur (Heriot-Watt U)	Examinateur

– 2016 –

Résumé Les tuiles sont des structures finies, linéaires ou arborescentes, possédant une notion de chevauchement. Elles sont utiles en informatique pour représenter des objets musicaux, comme étudié par Janin [2016]. Nous étudierons les ensembles de tuiles, en particulier comme représentations d'objets algébriques, en se basant sur la théorie des semigroupes inversifs.

Nos principaux objets d'étude seront les langages de tuiles, et les reconnaisseurs appropriés, que l'on peut définir en adaptant aux tuiles des notions bien connues sur les langages de mots. Nous nous intéresserons à la reconnaissance par automate, en présentant des automates sur les tuiles linéaires et arborescentes. Nous remarquerons les limites de la puissance de tels automates.

Tandis que la notion de reconnaissance par morphisme de monoïdes est inadaptée aux langages de tuiles, nous définirons celle de reconnaissabilité par prémorphisme, ou quasi-reconnaissabilité. Nous étudierons les liens entre quasi-reconnaissabilité et reconnaissabilité par automate de tuile.

Nous explorerons enfin les propriétés de clôtures de l'ensemble de langages de tuiles reconnus par automate, et de ceux reconnus par prémorphisme. La dernière partie sera essentiellement consacrée aux tuiles linéaires, et présentera le monoïde des décompositions restreintes, un outil pour le produit de langages de tuiles linéaires.

Title Contribution to the theory of tile languages

Abstract Tiles are finite, linear or tree-like structures, with a notion of overlapping. In computer science, they offer a useful way to represent musical objects, as studied by Janin [2016]. We will study the sets of tiles, especially as representations of algebraic objects, based on the theory of inverse semigroups.

Our main focus will be languages of tiles, and the appropriate recognizers, than can be defined by the adaptation to tiles of well-known notions over languages of words. We will look into the recognition by automata, by presenting automata over linear and tree-like tiles. We will remark the limits of the power of such automata.

While the notion of recognizability by morphisms is unsuitable to languages of tiles, we will define recognizability by premorphisms, or quasi-recognizability. We will study the links between quasi-recognizability and recognizability by tile automata.

We will finally look into the closure properties of the set of tile languages recognized by automata, and of the set of quasi-recognizable languages. The last part will be dedicated to linear tiles, and will present the monoid of restricted decompositions, a tool for the product of linear tile languages.

Keywords tiles, birooted trees, languages, inverse monoids, premorphisms, Ehresmann monoids, tile automata

Mots-clés tuiles, arbres à deux racines, langages, monoïdes inversifs, pré-morphismes, monoïdes d'Ehresmann, automates de tuiles

Laboratoire d'accueil Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique
Domaine universitaire, 351, cours de la Libération, 33405 Talence

Table des matières

Introduction

De nos jours, l'informatique offre de nombreux outils pour la création et la manipulation de musique, allant jusqu'à engendrer de nouveaux genres musicaux. Les structures avec chevauchement offrent des possibilités de modélisation prometteuses dans ce domaine ; on citera notamment Janin *et al.* [2013a] et Janin *et al.* [2013b]. Dans ces applications, le parallélisme inhérent à la musique est très bien rendu par des structures de cette forme, qui permettent de synchroniser des morceaux en certains points ou d'en jouer plusieurs simultanément. Leur intérêt pour la modélisation de systèmes réactifs a également été étudié par Dicky et Janin [2013].

Ces structures chevauchantes peuvent prendre des formes variées, en particulier les tuiles linéaires [Lawson, 1998b], les bi-arbres [Munn, 1974], ou, plus généralement, les monoïdes de tuiles de Kellendonk [1997]. En généralisant les travaux de Munn, le théorème de Stephen [1990] offre même une représentation générique de tout monoïde inversif en terme de structures tuilées. Dans cette thèse, nous nous restreindrons cependant à l'étude des tuiles linéaires et arborescentes.

On représente la notion de chevauchement par la désignation de points d'entrée et de sortie, permettant d'isoler un contexte au sein d'un objet, qu'il soit linéaire (mot) ou arborescent. Le cas le plus générique que nous étudierons est celui des arbres à deux racines, qui forment le monoïde inversif libre [Scheiblich, 1972],[Munn, 1974]. Nous donnerons une présentation exhaustive de ce monoïde de tuiles et de ses propriétés. Nous nous intéresserons également à deux cas particuliers. Celui des tuiles positives, son sous-monoïde, forme le monoïde ample libre, et celui des tuiles linéaires peut être obtenu en quotientant le monoïde inversif libre.

Les ensembles de tuiles constituant des monoïdes inversifs, cette théorie des langages s'oriente vers la théorie des semigroupes inversifs, introduite indépendamment par Wagner [1952] et Preston [1954] comme une généralisation de la notion de groupe et largement étudiée [Lawson, 1998a],[Petrich, 1984]. Cette connexion entre semigroupes inversifs et théorie des langages formels a en elle-même déjà été approfondie par plusieurs études. Margolis et Meakin [1993] ont prolongé les travaux de Stephen [1990], mettant en lumière le lien entre logique et automates. Silva [1996] a étudié les langages sur le monoïde inversif libre, en particulier en employant des automates dits inverses.

Avec en référence la logique monadique du second ordre (MSO), on constate que la puissance d'expression des outils usuels de théorie des langages, comme les automates ou les morphismes de monoïdes, est particulièrement limitée [Silva, 1996],[Janin, 2013b]. Une adaptation de ces outils est donc nécessaire, donnant naissance à la notion d'automate de tuiles et de quasi-reconnaissabilité proposée par Janin [2013a], qui capture essentiellement MSO.

Nous introduirons les éléments (E-monoïdes, prémorphismes adéquats) permettant de définir la quasi-reconnaissabilité, ainsi que les automates de bi-arbres et de tuiles linéaires. Nous construirons également d'important lien entre ces deux types de reconnaisseurs et leurs limites.

Bien que cette notion se révèle appropriée aux langages de tuiles, et généralement assez robuste, le produit de tels langages présente des difficultés qui ne peuvent être levées que dans des cas particuliers [Dubourg et Janin, 2014]. Nous nous intéresserons en particulier à la problématique de la clôture par produit, dans le cas général et dans celui des tuiles positives. Nous proposerons des outils pour démontrer la clôture par produit de l'ensemble des langages des tuiles linéaires positives.

Organisation du mémoire

Le premier chapitre exposera les notations utilisées et les notions de base : monoïdes, mots, langages, automates.

Le deuxième chapitre commencera par un rappel sur les groupes et le groupe libre, puis sera consacré à la définition et aux propriétés des monoïdes inversifs. Ceux-ci sont caractérisés par une notion d'inverse plus faible que celle existant dans les groupes, un élément et son inverse devant vérifier $x \cdot x^{-1} \cdot x = x$ et $x^{-1} \cdot x \cdot x^{-1} = x^{-1}$. On verra qu'un monoïde inversif est ordonné par l'ordre naturel et on remarquera l'importance des éléments idempotents. Enfin, on présentera dans la dernière section la notion clé de projections gauche et droite. Celles-ci permettront également de définir dans un cadre général deux cas particuliers de produit, le produit restreint et le produit disjoint.

Dans le troisième chapitre, on présentera les ensembles d'objets que ce mémoire vise à étudier, et la signification particulière des notions du chapitre précédent sur les objets en question. Les tuiles non-linéaires, ou bi-arbres, sont des arbres orientés où l'on distingue deux sommets particuliers, l'entrée et la sortie. Les tuiles linéaires, si elles forment un sous-monoïde des bi-arbres, peuvent également être représentées de manière plus simple par des triplets de mots. Les bi-arbres positifs, s'ils ne constituent pas un monoïde inversif, sont un cas particulier intéressant et forment le monoïde ample libre.

Le quatrième chapitre présente des reconnaisseurs appropriés aux tuiles. On présente les E-monoïdes, qui, associés à des prémorphismes adéquats, fournissent un reconnaisseur bien plus approprié que les morphismes de monoïdes, la quasi-reconnaissabilité. On introduit également une notion d'automate sur les bi-arbres et sur les tuiles linéaires ; si ces automates se limitent aux langages clos par le haut, on constate qu'ils capturent en revanche l'ensemble des langages clos par le haut définissables en MSO. Enfin, on montre que la quasi-reconnaissabilité correspond aux combinaisons booléennes de tels langages.

Bien que la quasi-reconnaissabilité apparaisse comme une notion appropriée aux langages de tuiles, l'étude de certains aspects de ces langages présente des difficultés inattendues. En particulier, la classe des langages quasi-reconnaissables n'est pas close par produit. Le cinquième chapitre présente, sur les tuiles linéaires, le monoïde des décompositions, un outil permettant d'établir la clôture par produit de l'ensemble des langages de tuiles positives quasi-reconnaissables.

Chapitre 1

Préliminaire

Ce chapitre rappelle des notions bien connues d'algèbre et de théorie des langages, et introduit les notations que l'on utilisera tout au long de ce travail. On présente un certain nombre de notations choisies, puis la notion de monoïde : un ensemble muni d'une notion de produit et d'un élément neutre. On voit en particulier le monoïde libre, ou monoïde des mots, et les monoïdes ordonnés. On présente ensuite la notion de langage, et un outil très utilisé pour la reconnaissance de langages de mots, les automates finis.

1.1 Notions élémentaires et notations

On mentionnera ici rapidement les notions les plus basiques concernant les ensembles et les relations d'ordre. Les chapitres suivants utiliseront au maximum des variations de ces notations classiques.

Soit un ensemble S. On note $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble des parties de S.

Un *préordre* sur S est une relation binaire sur S réflexive et transitive. Un ordre sur S est un préordre antisymétrique.

Un ordre strict est une relation binaire sur S irréflexive, antisymétrique et transitive. Pour tout ordre $\leq$ sur S, on nomme ordre strict associé à $\leq$ la plus grande relation irréflexive contenue dans $\leq$. On la note $<$.

Soit un ensemble S muni d'un ordre ou d'un préordre $\leq$, et un sous-ensemble $X \subseteq S$, on définit :

- ▷ La *clôture par le haut* de X est $X^{\uparrow} = \{y \in S \mid \exists x \in X, x \leq y\}$,
- ▷ la *clôture par le bas* de X est $X^{\downarrow} = \{y \in S \mid \exists x \in X, y \leq x\}$.

Pour tout $x \in S$, on notera $x^{\uparrow} = \{x\}^{\uparrow}$ et $x^{\downarrow} = \{x\}^{\downarrow}$.

On dira qu'un sous-ensemble $X \in S$ est clos par le haut lorsque $X = X^{\uparrow}$, et par le bas lorsque $X = X^{\downarrow}$.

Enfin, pour tous $x, y \in S$, on note $x \wedge y$ (resp. $x \vee y$) le plus grand élément inférieur (resp. le plus petit élément supérieur) à x et à y, si il existe. L'ensemble

S est un $\wedge$-semitreillis (resp. $\vee$-semitreillis) si $x \wedge y$ (resp. $x \vee y$) existe pour tous $x, y \in S$.

1.2 Monoïdes

Soit S un ensemble. Une *opération binaire* $\cdot$ sur S est une application de $S \times S$ dans S. L'image d'un couple $(x, y) \in S$ est notée $x \cdot y$. Une opération binaire $\cdot$ sur S est *associative* si, pour tous $x, y, z \in S$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Un *produit* sur S est une opération binaire associative sur S.

Un élément 0 de S est un *zéro*, ou *élément absorbant*, pour le produit si, pour tout $x \in S$, on a $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$. On remarquera qu'un zéro n'existe pas nécessairement, mais qu'il est unique s'il existe. En effet, supposons que 0 et $0'$ soient deux zéros, alors $0 = 0 \cdot 0' = 0'$.

Un élément 1 de S est un *élément neutre*, ou *unité*, pour le produit si, pour tout $x \in S$, on a $1 \cdot x = x = x \cdot 1$. On remarquera qu'un élément neutre n'existe pas nécessairement, mais qu'il est unique s'il existe. En effet, supposons que 1 et $1'$ soient deux éléments neutres, alors $1 = 1 \cdot 1' = 1'$.

Définition 1.2.1. Un *semigroupe* est une paire $(S, \cdot)$ formé d'un ensemble S et d'un produit $\cdot$. Un *monoïde* est un triplet $(S, \cdot, 1)$ tel que $(S, \cdot)$ est un semigroupe avec un élément neutre $1 \in S$.

Dans la suite, lorsqu'il n'y pas de risque de confusion, nous noterons simplement S pour un semigroupe $(S, \cdot)$ ou bien un monoïde $(S, \cdot, 1)$. Sauf exception dûment mentionnée, nous ne manipulerons que des monoïdes.

Exemple. Le singleton $\{1\}$ muni de l'opération $(1, 1) \mapsto 1$ et possédant 1 pour élément neutre est un monoïde. Il est appelé le monoïde trivial. Autre exemple, les entiers naturels munies de l'addition forment un monoïde avec 0 comme éléments neutre. De même les entiers naturel munis de la multiplication avec 1 comme élément neutre et 0 comme élément absorbant.

Définition 1.2.2. Soient deux semigroupes $(S_1, \cdot)$ et $(S_2, *)$, un *morphisme de semigroupes* de S_1 dans S_2 est une application φ telle que pour tous $x, y \in S_1$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

Soient un monoïde M_1 ayant pour élément neutre e_1 et un monoïde M_2 ayant pour élément neutre e_2, un *morphisme de monoïdes* de M_1 dans M_2 est un morphisme de semigroupes φ tel que $\varphi(e_1) = e_2$.

Définition 1.2.3. Etant donné un monoïde $(M, \cdot, 1)$, un *idéal* I de ce monoïde est un sous-ensemble $I \subseteq M$ tel que pour tout $x \in I$ et tout $y \in M$, on a $x \cdot y \in I$ et $y \cdot x \in I$.

Le *quotient* de $(M, \cdot, 1)$ par un idéal I est l'ensemble $M/I = (M \setminus I) \cup \{0\}$ muni du produit $*$ défini par, pour tous $x, y \in M/I$

$$x * y = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0,\ y = 0 \text{ ou } x \cdot y \in I, \\ x \cdot y & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que $(M/I, *, 1)$ est un monoïde. L'opération $*$ est bien associative. En effet, pour tous $x, y, z \in M/I$, si $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x * y = 0$ ou $y*z = 0$, on a donc $(x*y)*z = x*(y*z) = 0$ et sinon, comme $(x*y)*z = (x \cdot y) \cdot z$ et $x * (y * z) = x \cdot (y \cdot z)$ on hérite de l'associativité de $\cdot$ dans M. Pour finir, si $1 \in I$, alors pour tout $x \in M$, par définition d'un idéal, on a $x = 1 \cdot x \in I$, et donc M/I est le monoïde trivial. Dans le cas où $1 \notin I$ alors $1 \in M/I$ et on vérifie facilement que c'est l'élément neutre de $*$.

On remarquera de plus que la projection dans l'ensemble quotient

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M & \to & M/I \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \notin I, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

est un morphisme de monoïdes.

Elle préserve bien le produit. En effet, pour tous $x, y \in M$, si $x \in I$, alors $x \cdot y \in I$ donc $\varphi(x \cdot y) = 0$ et $\varphi(x) * \varphi(y) = 0 * \varphi(y) = 0$. Et si $x \notin I$, alors ou bien $y \in I$, donc $x \cdot y \in I$ et donc $\varphi(x \cdot y) = 0 = \varphi(x) * 0 = \varphi(x) * \varphi(y)$, ou bien $y \notin I$, donc $\varphi(x) = x$ et $\varphi(y) = y$, et donc $\varphi(x \cdot y) = x * y = \varphi(x) * \varphi(y)$. De plus, elle envoie bien l'unité sur l'unité. Si $I = M$, on a $M/I = \{0\}$, l'unité de M/I est donc 0 et $\varphi(1) = 0$. Si $I \neq M$, il existe $x \in M$ tel que $x \notin I$, donc comme $1 \cdot x = x$, on a $1 \notin I$, et donc $\varphi(1) = 1$.

1.3 Le monoïde libre

Soit A un *alphabet*, c'est à dire un ensemble d'éléments nommés *lettres*. On appelle mot sur A, ou simplement *mot*, une suite finie $a_1 a_2 \ldots a_n$ d'éléments de A. La *concaténation* de deux mots $u = a_1 \ldots a_m$ et $v = b_1 \ldots b_n$, notée uv, est définie comme le mot $uv = a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_n$. Cette opération est associative, et possède un élément neutre, le *mot vide*, noté 1.

L'ensemble A^* des mots sur A muni de la concaténation est donc un monoïde. On l'appelle le *monoïde libre* sur A, car A^* est le plus petit monoïde contenant A tel que, pour tout monoïde M et toute application f de A dans M, i étant l'injection canonique de A dans A^*, il existe un morphisme φ de A^* dans M tel que $f = \varphi \circ i$, c'est à dire tel que le diagramme de la figure 1.1 commute.

Étant donné un mot $u = a_1 a_2 \ldots a_n$, on note $|u| = n$ la longueur de u, le mot vide 1 étant l'unique mot de longueur 0, et pour tout lettre $a \in A$, on note $|u|_a$ le nombre d'occurrences de la lettre a dans u. Pour tout $1 \leq k \leq |u|$, on désigne par $u(k)$ la k-ième lettre de u ; on utilisera en particulier $u(1)$ qui désigne la première lettre de u, et $u(|u|)$ qui désigne la dernière lettre de u. On étend cette notation pour tous $1 \leq i \leq j \leq |u|$ en notant $u(i; j) = u(i)u(i + 1) \ldots u(j)$.

Définition 1.3.1. On définit l'*ordre préfixe* $\leq_p$ (resp. l'*ordre suffixe* $\leq_s$) sur A^* par, pour tous $u, v \in A^*$, $u \leq_p v$ (resp. $u \leq_s v$) quand il existe $w \in A^*$ tel

FIGURE 1.1 – Le rapport entre une application $f : A \to M$ et le monoïde libre A^*.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "i"] & \\ M & A^* \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

que $v = uw$ (resp. $v = wu$). On dit également que u est un préfixe (resp. un suffixe) de v.

On note $<_p$ (resp. $<_s$) l'ordre strict associé.

Définition 1.3.2. Pour tous $u, v \in A^*$, on notera $u \wedge_p v$ (resp. $u \wedge_s v$) le plus grand préfixe (resp. suffixe) commun à u et v. En particulier, si $u \leq_p v$ (resp. $u \leq_s v$), alors $u \wedge_p v = u$ (resp. $u \wedge_s v = u$).

On notera également $u \vee_p v$ (resp. $u \vee_s v$) le plus petit élément de $A^* \cup \{0\}$ ayant u et v comme préfixe (resp. comme suffixe). Autrement dit, $u \vee_p v$ vaut v si $u \leq_p v$, u si $v \leq_p u$, et 0 sinon ; et $u \vee_s v$ vaut v si $u \leq_s v$, u si $v \leq_s u$, et 0 sinon.

Exemple.

$$\begin{gathered} aabba \wedge_p aacc = aa \\ abab \wedge_p cbab = 1 \\ aba \vee_p abacca = abacca \\ abcaaa \vee_p abcbb = 0 \end{gathered}$$

Pour tout $S \subseteq A^*$, on appellera clôture préfixe de S sa clôture par le bas au sens de l'ordre préfixe, i.e. l'ensemble

$$pref(S) = \{v \in A^* \mid \exists u \in S, v \leq_p u\}$$

et de même on appellera clôture suffixe l'ensemble

$$suff(S) = \{v \in A^* \mid \exists u \in S, v \leq_s u\}.$$

On dira qu'un ensemble $S \subseteq A^*$ est clos par préfixe quand $S = pref(S)$, et par suffixe quand $S = suff(S)$.

Remarque. Par souci de lisibilité, on s'autorisera à noter $suff(u)$ pour $suff(\{u\})$ et $pref\{u, v, \ldots\}$ pour $pref(\{u, v, \ldots\})$.

Exemple.

$$pref\{abc, bb, caa\} = \{1, a, ab, abc, b, bb, c, ca, caa\}$$
$$suff(abaa) = \{abaa, baa, ba, a, 1\}$$

1.4 Monoïdes ordonnés

Définition 1.4.1. Un *monoïde ordonné* (resp. *monoïde préordonné*) est un monoïde M muni d'un ordre $\leq$ (resp. d'un préordre $\leq$) stable par produit, c'est-à-dire tel que pour tous $x, y, z \in M$, si $x \leq y$ alors $x \cdot z \leq y \cdot z$ et $z \cdot x \leq z \cdot y$.

Exemple. Un monoïde quelconque muni de l'égalité est un monoïde ordonné. Soit un alphabet A ordonné par un ordre $\leq$, on définit l'ordre lexicographique $\leq_{lex}$ sur A^* par, pour tous $u, v \in A^*$, $u \leq_{lex} v$ quand $u \leq_p v$ ou $u(k) \leq v(k)$ avec $k = min\{i \in \mathbb{N} \mid u(i) \neq v(i)\}$; l'ensemble A^* muni de $\leq_{lex}$ est un monoïde ordonné. En revanche, A^* muni de l'ordre préfixe ou de l'ordre suffixe n'est pas un monoïde ordonné. On remarque en effet que $a \leq_p aa$ mais que $ab \not\leq_p aab$.

Le monoïde A^*, muni du préordre $\leq$ défini, pour tous $u, v \in A^*$, par $u \leq v$ quand $|u| \leq |v|$, est un monoïde préordonné.

Définition 1.4.2. Soient deux monoïdes ordonnés (resp. préordonnés) M_1 ayant pour élément neutre e_1 et M_2 ayant pour élément neutre e_2, un morphisme de monoïdes $\varphi : M_1 \to M_2$ est un *morphisme de monoïdes ordonnés* (resp. *préordonnés*) lorsque :

$$\text{pour tous } x, y \in M_1, \text{ si } x \leq y, \text{ alors } \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Un *prémorphisme de monoïdes ordonnés* (resp. *préordonnés*) de M_1 dans M_2 est une application φ telle que :

$$\begin{gathered}\text{pour tous } x, y \in M_1, \ \varphi(x \cdot y) \leq \varphi(x) \cdot \varphi(y), \\ \varphi(e_1) = e_2, \\ \text{pour tous } x, y \in M_1, \text{ si } x \leq y, \text{ alors } \varphi(x) \leq \varphi(y).\end{gathered}$$

1.5 Langages

Définition 1.5.1. Un *langage* sur un monoïde M est un sous-ensemble de M.

On peut définir sur l'ensemble $\mathcal{P}(M)$ des langages sur M un certain nombre d'opérations de base. Considérons les langages $L, L_1, L_2 \subseteq M$, on définit l'union et l'intersection de langages,

$$L_1 \cup L_2 = \{x \in M \mid x \in L_1 \vee x \in L_2\} \text{ et } L_1 \cap L_2 = \{x \in M \mid x \in L_1 \wedge x \in L_2\}.$$

On définit également le complémentaire dans M, ou simplement complémentaire,

$$L^C = \{x \in M \mid x \notin L\},$$

ainsi que la soustraction ensembliste,

$$L_1 \setminus L_2 = \{x \in M \mid x \in L_1, x \notin L_2\} = L_1 \cap L_2^C$$

Le produit de langages est l'extension point à point du produit sur M,

$$L_1 \cdot L_2 = \{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}.$$

Dans le cas du produit avec un singleton, pour un mot u, on notera $u \cdot L = \{u\} \cdot L$ et $L \cdot u = L \cdot \{u\}$.

De plus, on définit itérativement les exposants entiers d'un langage par $L^0 = \{1\}$ et pour tout $n \geq 1$, on a $L^n = L^{n-1} \cdot L$, ainsi que l'étoile de Kleene sur les langages par $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$.

Théorème 1.5.1. *Soit un monoïde M avec élément neutre 1, l'ensemble $\mathcal{P}(M)$ des langages sur M muni du produit de langages est un monoïde ayant pour élément neutre le singleton $\{1\}$.*

Démonstration. Par définition, le produit de langages est une opération interne à $\mathcal{P}(M)$. Il est associatif : pour tous $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{P}(M)$,

$$(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) = \{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, x_3 \in L_3\}$$

et, comme $L_1 \cdot \{1\} = \{x \cdot 1 \mid x \in L_1\} = L_1$ et $\{1\} \cdot L_1 = L_1$, il possède l'élément neutre $\{1\}$. $\square$

Pour des raisons pratiques qui apparaîtront en particulier lors de l'étude de langages de tuiles linéaires, on définit également la notion de langage strict sur un monoïde avec zéro, correspondant à l'exclusion systématique du zéro.

Définition 1.5.2. Un *langage strict* sur un monoïde M avec un zéro 0 est un langage sur M ne contenant pas 0.

Les opérations $\cup$, $\cap$ et $\setminus$ restent identiques sur (et internes à) l'ensemble des langages strict. En revanche, la définition des autres opérations doit être altérée sur les langages stricts. Soit un monoïde M muni d'un zéro 0, le complémentaire d'un langage strict L sur M est $L^C = (M \setminus L) \setminus \{0\}$.

Le produit de deux langages stricts L_1, L_2 sur M est

$$L_1 \cdot L_2 = \{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\} \setminus \{0\}.$$

On remarquera que le singleton $\{1\}$ est toujours l'élément neutre pour le produit de langages stricts.

Tout comme sur les langages, les exposants entiers d'un langage strict L sur M sont définis récursivement par $L^0 = \{1\}$ et, pour tout $n \geq 1$, $L^n = L^{n-1} \cdot L$. De même, l'étoile de Kleene d'un langage strict L sur M est définie par $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$.

Théorème 1.5.2. *Soient un monoïde M avec un zéro 0 et 1 son élément neutre, l'ensemble $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}(M)$ des langages stricts sur M muni du produit de langages est un monoïde ayant pour élément neutre le singleton $\{1\}$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du théorème 1.5.1. □

Un des outils les plus anciens et les mieux étudiés Pin [2011] pour définir des langages est la notion de langage reconnaissable, qui est en particulier bien connue dans le cadre de la reconnaissabilité de langages de mots.

Définition 1.5.3 (Langage reconnaissable par morphisme de monoïdes)**.** Soit un morphisme de monoïdes $\varphi : M_1 \to M_2$. Un langage $L \subseteq M_1$ est reconnu par φ s'il existe un sous-ensemble fini $S \subseteq M_2$ tel que $L = \varphi^{-1}(S)$, ou, de façon équivalente, si $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$.

Remarque. L'expression usuelle est langage *reconnaissable par monoïde.* On emploie ici le terme *reconnaissable par morphisme de monoïdes* afin de distinguer cette notion de celle de langage *reconnaissable par prémorphisme de monoïdes* qui sera introduite ultérieurement.

1.6 Automates finis

Les automates finis sont un modèle largement étudié pour reconnaître des langages, qu'il s'agisse de mots ou de structures plus complexes. Les propriétés des automates finis de mots sont bien connues, on pourra par exemple se reporter à Pin [2011].

Définition 1.6.1. Un *automate fini non-déterministe (NFA)* sur un alphabet A est un 4-uplet $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F \rangle$, où Q est un ensemble fini d'états, $\delta : A \to \mathcal{P}(Q \times Q)$ est une fonction de transition, $I \subseteq Q$ est un ensemble d'états initiaux, $F \subseteq Q$ est un ensemble d'états finaux.

Un *calcul* de $\mathcal{A}$ sur un mot $u \in A^*$ est un mot $r \in Q^*$ de longueur $|u| + 1$, tel que pour tout $1 \leq i \leq |u|$, $(r(i), r(i+1)) \in \delta(u(i))$; c'est un *calcul acceptant* si la première lettre du calcul vérifie $r(1) \in I$ et si la dernière lettre du calcul vérifie $r(|u| + 1) \in F$.

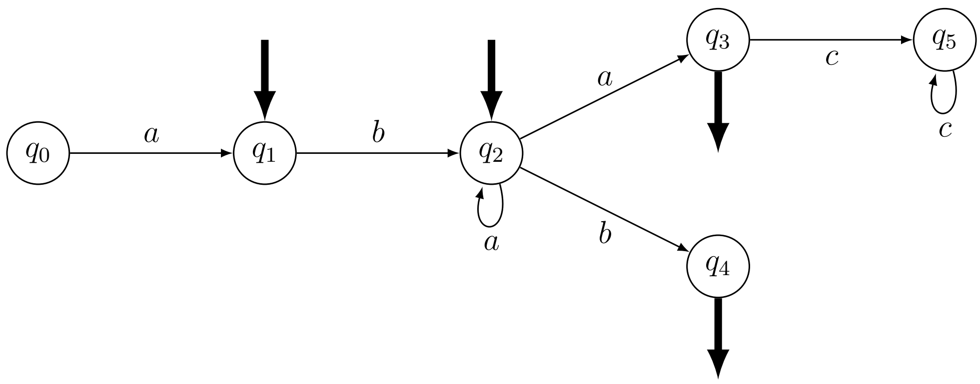
Un mot u est *accepté* par un automate $\mathcal{A}$ s'il existe un calcul acceptant de $\mathcal{A}$ sur u. L'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ des mots acceptés par un automate $\mathcal{A}$ est appelé le *langage de mots reconnu* par $\mathcal{A}$.

Exemple. L'automate $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$ sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ avec $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, δ définie par

- ▷ $\delta(a) = \{(q_0, q_1), (q_2, q_2), (q_2, q_3)\}$,
- ▷ $\delta(b) = \{(q_1, q_2), (q_2, q_4)\}$,
- ▷ $\delta(c) = \{(q_3, q_5), (q_5, q_5)\}$,

et $I = \{q_1, q_2\}$, et $F = \{q_3, q_4\}$, est représenté sur la figure 1.2.

FIGURE 1.2 – L'automate $\mathcal{A}$. On indique les états initiaux par une flèche entrante et les états finaux par une flèche sortante.



Remarque. L'automate de mots $\mathcal{A}$ présenté dans la figure 1.2 ci-dessus comporte des états que l'on peut considérer comme superflus, dans le sens suivant : on remarque que l'état q_0 n'est accessible depuis aucun état initial, et aucun état terminal n'est accessible depuis l'état q_5 ; il n'existe donc aucun calcul acceptant sur un mot comportant l'un de ces états, et leur suppression n'altérerait en rien le langage de mots reconnu par $\mathcal{A}$. On parle d'automates "élagués", ou *trim automata* (Pin [2011]) pour désigner un automate contenant, pour chacun de ses états, un chemin orienté depuis un état initial et un chemin orienté vers un état final.

De tels automates sont aussi puissants sur les mots que les NFA, mais on verra que cela n'est plus vrai dans le cas de la reconnaissance de tuiles.

Théorème 1.6.1. *Un langage de mots est reconnaissable par morphisme si et seulement s'il est reconnaissable par un NFA.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Soit $\mathcal{A}$ un automate et L le langage reconnu par $\mathcal{A}$. On considère $M = \mathcal{P}(Q \times Q)$ muni du produit défini, pour tous $S_1, S_2 \in M$, par

$$S_1 \cdot S_2 = \{(p, q) \in Q \times Q \mid \exists r \in Q, (p, r) \in S_1, (r, q) \in S_2\}.$$

On remarque que M est un monoïde ayant pour élément neutre $1 = \{(p,p) \mid p \in Q\}$. On définit maintenant l'application $\varphi : A^* \to M$ par, pour tout $u \in A^*$,

$$\varphi(u) = \{(p,q) \in Q \times Q \mid \text{il existe un calcul } r \text{ de } \mathcal{A} \\ \text{sur } u \text{ tel que } r(1) = p \text{ et } r(|r|) = q\}.$$

On remarque que $\varphi(1) = \{(p,p) \mid p \in Q\} = 1$ et que, par définition du produit dans M, pour tous $u, v \in A^*$, $\varphi(u) \cdot \varphi(v) = \varphi(uv)$. Par conséquent, φ est un morphisme ; de plus, $L = \varphi^{-1}(\{S \in M \mid S \cap I \times F \neq \emptyset\})$.

($\Rightarrow$) Soit M un monoïde fini, $\varphi : A^* \to M$ un morphisme et $L \subseteq A^*$ un langage tel que $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$. On considère l'automate $\mathcal{A} = \langle M, \delta, \{1\}, \varphi(L)\rangle$, dont la fonction de transition δ est définie par, pour tout $a \in A$,

$$\delta(a) = \{(x, x \cdot \varphi(a)) \in M \times M\}.$$

Tout calcul acceptant de $\mathcal{A}$ sur un mot $a_1 a_2 \dots a_n$ sera donc de la forme

$$(\varphi(1))\ (\varphi(1) \cdot \varphi(a_1))\ (\varphi(1) \cdot \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2))\ \dots\ (\varphi(1) \cdot \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \dots \varphi(a_n)),$$

le mot sera donc accepté par l'automate si et seulement si

$$\varphi(1) \cdot \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \dots \varphi(a_n) \in \varphi(L)$$

c'est à dire, φ étant un morphisme, si et seulement si

$$\varphi(a_1 a_2 \dots a_n) \in \varphi(L).$$

□

La notion de déterminisme peut être étudiée sur tout type d'automates. Informellement, un automate est déterministe si, dans une situation donnée, il n'a jamais de choix à faire entre plusieurs transitions. La question qui se pose alors est celle de la puissance de tels automates, et de la possibilité de déterminiser un automate non-déterministe, c'est à dire de trouver un automate déterministe reconnaissant le même langage.

Définition 1.6.2. Un automates fini de mots $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$ est dit *déterministe* (DFA) lorsque :

- ▷ il possède un seul état initial,
- ▷ pour tout état $p \in Q$ et toute lettre $a \in A$, il n'existe pas deux transitions distinctes $(p, q_1), (p, q_2) \in \delta(a)$.

Exemple. L'automate $\mathcal{A}$ présenté figure 1.2 viole deux fois la condition de déterminisme : il possède deux états initiaux q_1 et q_2, et il présente les deux transitions $(q_2, q_2), (q_2, q_3) \in \delta(a)$.

Théorème 1.6.2. *Un langage de mots est reconnaissable par un NFA si et seulement s'il est reconnaissable par un DFA.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Tout DFA est un NFA.

($\Rightarrow$) Soit un NFA $\mathcal{A}$, on définit le DFA $\mathcal{A}_D = \langle \mathcal{P}(Q), \delta_D, I_D, F_D \rangle$ par

- ▷ pour tout $a \in A$,
  $\delta_D(a) = \{(S, \{q \in Q \mid \exists p \in S, (p, q) \in \delta(a)\}) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)\}$,
- ▷ $I_D = \{I\}$,
- ▷ $F_D = \{S \in \mathcal{P}(Q) \mid S \cap F \neq \emptyset\}$.

Montrons que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_D)$.

($\subseteq$) Soit un mot u tel qu'il existe donc un calcul acceptant r de $\mathcal{A}$ sur u. Pour tout $1 \leq i \leq |u|$, il existe donc une transition $(r(i), r(i+1)) \in \delta(u(i))$, avec $r(1) \in I$ et $r(|u|+1) \in F$. Par induction sur la longueur du calcul r, on peut donc construire un calcul r_D de $\mathcal{A}_D$ sur u, avec $r_D(1) = I$, tel que pour tout $1 \leq i \leq |u|$, on a $r_D(i) \neq \emptyset$ car $r(i) \in r_D(i)$, et $r_D(|u|+1) \in F_D$ car $r(|u|+1) \in r_D$. Le calcul r_D est donc acceptant.

($\supseteq$) Inversement, s'il existe un calcul acceptant r_D de $\mathcal{A}_D$ sur un mot u, alors il existe un calcul r de $\mathcal{A}$ sur u tel que pour tout $1 \leq i \leq |u|+1$, $r(i) \in r_D(i)$, avec $r(i+1) \in F$. Et comme $r_D(1) = I$, r est donc un calcul acceptant. $\square$

Chapitre 2

Monoïdes inversifs

Le monoïdes inversifs sont une généralisation de la notion de groupes, où la notion d'inverse est plus faible, un élément et son unique inverse devant vérifier $x \cdot x^{-1} \cdot x = x$ et $x^{-1} \cdot x \cdot x^{-1} = x^{-1}$. Le seul groupe qui nous intéresse est le groupe libre, en tant qu'outil pour des définitions ultérieures. On présente un certain nombre de notions essentielles dans les semigroupes et les monoïdes inversifs, en particulier les projections, l'ordre naturel, et deux cas particuliers du produit, le produit disjoint et le produit restreint.

2.1 Préliminaire sur les groupes

Les monoïdes inversifs dont il est question par la suite se situent à mi-chemin entre les monoïdes et les groupes. Nous rappelons ici quelques aspects élémentaires concernant les groupes et, plus spécifiquement, le groupe libre qui joue un rôle fondamental dans la théorie des monoïdes inversifs, en particulier dans la définition à venir du monoïde inversif libre.

Définition 2.1.1. Un *groupe* G est un monoïde avec élément neutre 1 tel que tout $x \in G$ possède un unique élément x^{-1} tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Propriété 2.1.1. *Tout groupe est un monoïde inversif, c'est-à-dire que tout élément x possède un unique inverse x^{-1} vérifiant $x \cdot x^{-1} \cdot x = x$ et $x^{-1} \cdot x \cdot x^{-1} = x^{-1}$.*

Démonstration. Soit un groupe G et $x \in G$. Il existe $x^{-1} \in G$ tel que $x \cdot x^{-1} = 1$ et $x^{-1} \cdot x = 1$, donc $x \cdot x^{-1} \cdot x = x$ et $x^{-1} \cdot x \cdot x^{-1} = x^{-1}$. L'élément x possède donc au moins un inverse.

On montre que cet inverse est unique. Soit y tel que $x \cdot y \cdot x = x$ et $y \cdot x \cdot y = y$. On a donc $x \cdot y \cdot x \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1}$ et $y \cdot x \cdot y \cdot y^{-1} = y \cdot y^{-1}$, donc $x \cdot y = 1$ et $y \cdot x = 1$. Par unicité de x^{-1} dans le groupe G, on a donc $y = x^{-1}$. L'élément x possède donc un unique inverse. $\square$

On considèrera, pour tout alphabet A, un alphabet disjoint $\bar{A}$ contenant constitué de l'ensemble des lettres $\bar{a}$ telles que a est une lettre de A. On notera également $\widetilde{A} = A \cup \bar{A}$.

Définition 2.1.2 (Groupe libre)**.** On définit le groupe libre $FG(A)$ généré par A comme le quotient de $(A \cup \bar{A})^*$ par la plus petite congruence $\backsim$ telle que, pour toute lettre $a \in A$, $a\bar{a} = 1$ et $\bar{a}a = 1$.

Remarque. Soit $\longrightarrow$ la relation de réécriture induite par les règles $a\bar{a} \longrightarrow 1$ et $\bar{a}a \longrightarrow 1$ pour tout $a \in A$. Il est bien connu que toute classe de la congruence $[a] \in FG(A)$ contient un unique élément, qu'on appellera forme réduite de u ou $red(u)$, irréductible par rapport à $\longrightarrow$, c'est-à-dire ne contenant aucun sous-mot de la forme $a\bar{a}$ ou $\bar{a}a$. Il s'ensuit que les éléments de $FG(A)$ peuvent être définis comme des mots de la forme $red(u)$ avec $u \in (A \cup \bar{A})^*$, avec le produit au sein du groupe défini par $u \cdot v = red(uv)$ pour tous $u, v \in FG(A)$. Comme on a $u \cdot \bar{u} = 1 = \bar{u} \cdot u$, dans le groupe libre $FG(A)$, les inverses syntaxiques sont les inverses de groupe. Par extension, pour tous mots $u, v \in (A \cup \bar{A})^*$, on désigne également par $u \cdot v$ la forme réduite de uv. Les propriétés suivantes de la réduction sont bien connues : pour tous $u, v, w \in (A \cup \bar{A})^*$,

- ▷ si $u, v \in A^*$ ou $u, v \in \bar{A}^*$ alors $u \cdot v = uv$,
- ▷ $\overline{u \cdot v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$,
- ▷ $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$.

Remarquons par ailleurs que $FG(A)$ est bien un groupe, tout élément $u \in FG(A)$ ayant pour inverse $\bar{u}$ puisque $red(u\bar{u}) = 1$.

Du fait de la représentation des éléments du groupe libre par leurs formes réduites, et afin d'éviter d'importantes ambiguïtés dans les chapitres ultérieurs, on insistera sur deux points de notation.

Pour tous $u, v \in FG(A)$, on désignera exclusivement le produit de u et v par la notation $u \cdot v$. La notation uv désigne la concaténation de ces deux éléments, qui n'est pas nécessairement un élément du groupe libre. Par exemple $a \cdot \bar{a} = 1 \in FG(A)$, alors que $a\bar{a} \notin FG(A)$.

De plus, comme le groupe libre sur A est représenté comme un sous-ensemble du monoïde libre sur $A \cup \bar{A}$, les relations $\leq_p$ et $\leq_s$ sont donc également des ordres sur $FG(A)$. On remarque en revanche que $FG(A)$ muni d'un de ces ordres n'est pas un monoïde ordonné, car $\leq_p$ et $\leq_s$ ne sont pas stable par produit.

Propriété 2.1.2. *Soient $u, v \in FG(A)$, on a $u \leq_p v$ si et seulement si $\bar{u} \leq_s \bar{v}$.*

Démonstration. Soient $u, v \in FG(A)$ avec $u \leq_p v$, alors il existe $w \in FG(A)$ tel que $uw = v$, donc $\bar{v} = \overline{uw} = \bar{w}\bar{u}$, donc $\bar{u} \leq_s \bar{v}$.

Réciproquement, soient $u, v \in FG(A)$ avec $\bar{u} \leq_s \bar{v}$, alors il existe $w \in FG(A)$ tel que $w\bar{u} = \bar{v}$, donc $v = \overline{w\bar{u}} = u\bar{w}$, donc $u \leq_p v$.

□

Corollaire 2.1.3. *Soient* $u, v \in FG(A)$*, alors* $\bar{u} \vee_p \bar{v} = \overline{u \vee_s v}$.

De même, soient $u, v \in FG(A)$*, alors* $\bar{u} \vee_s \bar{v} = \overline{u \vee_p v}$.

2.2 Monoïdes inversifs

Les semigroupes réguliers ont été initialement introduits par Green [1951], fournissant une notion d'inverse sur les semigroupes ; on parle de semigroupes inversifs lorsque cet inverse est unique. C'est essentiellement cette notions d'inverse, plus faible que celle existant sur les groupes, que l'on utilisera sur les monoïdes.

Soit un semigroupe M, et un élément $x \in M$. Un élément $y \in M$ est un *inverse* de x lorsque $x = x \cdot y \cdot x$ et $y = y \cdot x \cdot y$.

Définition 2.2.1. Un semigroupe S est *régulier* si chaque élément de S possède un inverse.

Définition 2.2.2. Un semigroupe S est *inversif* si chaque élément de S possède un unique inverse.

Dans ce cas, l'inverse de x est noté x^{-1}.

Exemples. Soit $M_x = \{0, 1, x, \bar{x}\}$, muni du produit $\cdot$ défini par 0 est un zéro, 1 est un élément neutre, $x \cdot x = \bar{x} \cdot \bar{x} = 0$ et $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 1$. $(M_x, \cdot, 1)$ est un monoïde inversif.

Soit un ensemble non-vide S, on considère l'ensemble $M = (S \times S) \cup \{1, 0\}$, avec le produit $\cdot$ défini par 1 est un élément neutre, 0 un zéro, et pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S \times S$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \begin{cases} (x_1, y_2) & \text{si } y_1 = x_2 \\ 0 & \text{si } y_1 \neq x_2 \end{cases}$$

Le produit est associatif : pour tous $u, v, w \in M$, si $1 \in \{u, v, w\}$ ou $0 \in \{u, v, w\}$, on a trivialement $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$. Et si $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, $w = (x_3, y_3)$, soit $y_1 = x_2$ et $y_2 = x_3$ et donc

$$((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) = (x_1, y_3),$$

soit $y_1 \neq x_2$ ou $y_2 \neq x_3$ et donc

$$((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) = 0.$$

M est donc un semigroupe ; comme il possède l'élément neutre 1, c'est un monoïde.

On montre que M est inversif. On constate que 1 et 0 sont chacun son propre inverse, car $1 = 1 \cdot u \cdot 1$ et $u = u \cdot 1 \cdot u$ si et seulement si $u = 1$, de même que $0 = 0 \cdot u \cdot 0$ et $u = u \cdot 0 \cdot u$ si et seulement si $u = 0$. Tout élément (x, y) a pour inverse $(x, y)^{-1} = (y, x)$, puisque $(x, y) \cdot (y, x) \cdot (x, y) = (x, x) \cdot (x, y) = (x, y)$. Enfin, cette inverse est unique, car pour tout (u, v), si $u \neq y$, $(x, y) \cdot (u, v) \cdot (x, y) = 0 \cdot (x, y) = 0$, et si $v \neq x$, $(x, y) \cdot (u, v) \cdot (x, y) = (x, y) \cdot 0 = 0$.

Définition 2.2.3. Soient deux monoïdes inversifs M_1 et M_2, un morphisme de monoïdes $\varphi : M_1 \to M_2$ est *morphisme de monoïdes inversifs* lorsque :

$$\text{pour tout } x \in M_1,\ \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}.$$

Soit un semigroupe S, on appelle *idempotent* un élément $e \in S$ vérifiant $e \cdot e = e$. L'ensemble des idempotents de S est noté $E(S)$.

Exemple. Dans un monoïde avec zéro, le zéro et l'unité sont des idempotents.

Ces éléments particuliers jouent un rôle important, en fournissant une autre caractérisation des semigroupes et monoïdes inversifs et en permettant notamment de définir l'ordre naturel (Lawson [1991]), une notion due à Nambooripad [1980].

Introduisons tout d'abord deux propriétés de base sur les idempotents, dans les semigroupes réguliers et dans les semigroupes inversifs :

Propriété 2.2.1. *Dans un semigroupe régulier, tout idempotent est son propre inverse.*

Démonstration. Soient un semigroupe régulier S et $e \in E(S)$, on a $e = e \cdot e \cdot e$, donc e est un inverse de e. □

Propriété 2.2.2. *Dans un semigroupe inversif, le produit de deux idempotents est un idempotent.*

Démonstration. Soient un semigroupe inversif S et $e_1, e_2 \in E(S)$. Soit $y = (e_1 \cdot e_2)^{-1}$; on rappelle que y est unique. Comme e_1 et e_2 sont idempotents, on a

$$e_1 \cdot e_2 \cdot (e_2 \cdot y \cdot e_1) \cdot e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_2 \cdot y \cdot e_1 \cdot e_2,$$

donc comme y est l'inverse de $e_1 \cdot e_2$,

$$e_1 \cdot e_2 \cdot (e_2 \cdot y \cdot e_1) \cdot e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_2.$$

Inversement, comme e_1 et e_2 sont idempotents, on a

$$(e_2 \cdot y \cdot e_1) \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot (e_2 \cdot y \cdot e_1) = e_2 \cdot y \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot y \cdot e_1$$

et donc comme y est l'inverse de $e_1 \cdot e_2$,

$$(e_2 \cdot y \cdot e_1) \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot (e_2 \cdot y \cdot e_1) = e_2 \cdot y \cdot e_1$$

Donc $e_2 \cdot y \cdot e_1$ est l'inverse de $e_1 \cdot e_2$, i.e. $e_2 \cdot y \cdot e_1 = y$.

Par ailleurs, comme y est l'inverse de $e_1 \cdot e_2$, on a $y = y \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot y$, donc

$$e_2 \cdot y \cdot e_1 = e_2 \cdot y \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot y \cdot e_1.$$

Donc $e_2 \cdot y \cdot e_1$ est un idempotent, i.e. y est un idempotent. Donc d'après la propriété 2.2.1 y est son propre inverse. Donc comme y est l'inverse de $e_1 \cdot e_2$, on a $y = e_1 \cdot e_2$. Donc $e_1 \cdot e_2$ est un idempotent. □

Le lemme suivant fournit un critère alternatif de définition des semigroupes inversifs, et une de leur propriétés fondamentales :

Lemme 2.2.3. *Dans un semigroupe régulier S, chaque élément possède un unique inverse si et seulement si les idempotents commutent, i.e. si et seulement si pour tous $e_1, e_2 \in E(S)$, on a $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit un semigroupe régulier S dans lequel chaque élément possède une unique inverse, c'est-à-dire un semigroupe inversif. Soient deux idempotents $e_1, e_2 \in E(S)$, d'après la propriété 2.2.2 les éléments $e_1 \cdot e_2$ et $e_2 \cdot e_1$ sont des idempotents.

Comme e_2 et e_1 sont idempotents, on a

$$e_1 \cdot e_2 \cdot (e_2 \cdot e_1) \cdot e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_2 \cdot e_1 \cdot e_2,$$

donc comme $e_1 \cdot e_2$ est idempotent,

$$e_1 \cdot e_2 \cdot (e_2 \cdot e_1) \cdot e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_2.$$

Et de même

$$e_2 \cdot e_1 \cdot (e_1 \cdot e_2) \cdot e_2 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_1.$$

Par conséquent $e_2 \cdot e_1$ est l'inverse de $e_1 \cdot e_2$. Donc comme $e_1 \cdot e_2$ est idempotent, d'après la propriété 2.2.1, on a $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1$.

($\Leftarrow$) Soit un semigroupe régulier S tel que les idempotents commutent. Soit un élément $x \in S$, et soient $y_1, y_2 \in S$ deux inverses de x. On va montrer que ces deux inverses sont égaux.

Comme y_1 et y_2 sont des inverses de x, on a $y_1 = y_1 \cdot x \cdot y_1$ et $y_2 = y_2 \cdot x \cdot y_2$, donc $x \cdot y_1 = x \cdot y_1 \cdot x \cdot y_1$ et $x \cdot y_2 = x \cdot y_2 \cdot x \cdot y_2$. On a donc $x \cdot y_1, x \cdot y_2 \in E(S)$.

Or, comme $y_2 = y_2 \cdot x \cdot y_2$ et $x = x \cdot y_1 \cdot x$, on a

$$y_2 = y_2 \cdot x \cdot y_1 \cdot x \cdot y_2$$

Comme les idempotents $x \cdot y_1$ et $x \cdot y_2$ commutent, on a donc

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \cdot x \cdot y_2 \cdot x \cdot y_2 \\ &= y_1 \cdot x \cdot y_2 \\ &= y_1 \cdot x \cdot y_1 \cdot x \cdot y_2 \end{aligned}$$

Á nouveau, les idempotents $x \cdot y_1$ et $x \cdot y_2$ commutent, donc

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \cdot x \cdot y_2 \cdot x \cdot y_1 \\ &= y_1 \cdot x \cdot y_1 \\ &= y_1 \end{aligned}$$

□

On en déduit une propriété de base de la notion d'inverse dans les semigroupes inversifs :

Propriété 2.2.4. *Soient un semigroupe inversif M et $x, y \in M$, alors $y^{-1} \cdot x^{-1} = (x \cdot y)^{-1}$.*

Démonstration. Soient un semigroupe inversif M et $x, y \in M$. Par le lemme 2.2.3, comme $x \cdot x^{-1}, y^{-1} \cdot y \in E(M)$, on a

$$(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = x \cdot x^{-1} \cdot x \cdot y \cdot y^{-1} \cdot y.$$

Donc par définition de l'inverse on a

$$(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = x \cdot y.$$

De même $(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = y^{-1} \cdot x^{-1}$. □

Définition 2.2.4. Soit M un monoïde inversif. L'*ordre naturel* $\leq$ sur M est défini, pour tous $x, y \in M$, par $x \leq y$ quand il existe un idempotent $e \in E(M)$ tel que $x = e \cdot y$.

On note $U(M) = \{x \in S \mid x \leq 1\}$ l'ensemble des sous-unités de M.

La propriété suivante étend cette définition de l'ordre naturel, en montrant que $x \leq y$ requiert de façon équivalente un idempotent e tel que $x = e \cdot y$ ou $x = y \cdot e$.

Propriété 2.2.5. *Soit M un monoïde inversif et $x, y \in M$, on a $x \leq y$ si et seulement s'il existe un idempotent $e \in E(M)$ tel que $x = y \cdot e$.*

Démonstration. Soit un monoïde inversif M.

($\Rightarrow$) Soient $x, y \in M$ tels que $x \leq y$, alors il existe $e \in E(S)$ tel que $x = e \cdot y$. Soit $e' = y^{-1} \cdot e \cdot y$, alors $y \cdot e' = y \cdot (y^{-1} \cdot e \cdot y) = (y \cdot y^{-1}) \cdot e \cdot y$. Or $y = y \cdot y^{-1} \cdot y$ donc $y \cdot y^{-1} = y \cdot y^{-1} \cdot y \cdot y^{-1}$, i.e. $y \cdot y^{-1} \in E(S)$. Donc comme les idempotents commutent, $y \cdot e' = e \cdot (y \cdot y^{-1}) \cdot y = e \cdot y$. On a donc $x = y \cdot e'$.

On montre que $e' \in E(S)$: $e' \cdot e' = y^{-1} \cdot e \cdot y \cdot y^{-1} \cdot e \cdot y$, donc comme les idempotents commutent, $e' \cdot e' = y^{-1} \cdot y \cdot y^{-1} \cdot e \cdot e \cdot y = y^{-1} \cdot e \cdot y = e'$.

($\Leftarrow$) Soient $x, y \in M$ et $e \in E(S)$ tel que $x = y \cdot e$. Par symétrie $x \leq y$. □

Lemme 2.2.6. *Dans un monoïde inversif, l'ordre naturel est une relation d'ordre stable par produit.*

Démonstration. Soit un M un monoïde inversif.

On montre tout d'abord que $\leq$ sur M est un ordre. Pour tout élément $x \in M$, on a $x = 1 \cdot x$, donc $x \leq x$. L'ordre naturel est donc réflexif.

Pour tous $x_1, x_2 \in M$, si $x_1 \leq x_2$ et $x_2 \leq x_1$, alors il existe $e_1, e_2 \in U(M)$ tels que $x_1 = e_1 \cdot x_2$ et $x_2 = e_2 \cdot x_1$. On a donc $e_2 \cdot x_2 = e_2 \cdot e_2 \cdot x_1 = e_2 \cdot x_1 = e_1$. Comme $x_1 = e_1 \cdot e_2$, on a

$$x_1 = e_1 \cdot e_2 \cdot x_2$$

et d'après le lemme 2.2.3, les idempotents e_1 et e_2 commutent donc

$$\begin{aligned} x_1 &= e_2 \cdot e_1 \cdot x_2 \\ &= e_2 \cdot x_1 \\ &= x_2 \end{aligned}$$

L'ordre naturel est donc bien antisymétrique.

Pour tous $x_1, x_2, x_3 \in M$, si $x_1 \leq x_2$ et $x_2 \leq x_3$ alors il existe $e_1, e_2 \in U(M)$ tels que $x_1 = e_1 \cdot x_2$ et $x_2 = e_2 \cdot x_3$. Donc $x_1 = e_1 \cdot e_2 \cdot x_3$. Or d'après le lemme 2.2.3, on a $e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_2 \cdot e_1 \cdot e_2$, donc $e_1 \cdot e_2$ est un idempotent. Par conséquent $x_1 \leq x_3$, l'ordre naturel est donc transitif.

On montre de plus que $\leq$ sur M est stable par produit. Soient $x, y, z \in M$ tels que $x \leq y$. Il existe donc $e \in E(M)$ tel que $x = e \cdot y$, donc $x \cdot z = e \cdot y \cdot z$. On a donc $x \cdot z \leq y \cdot z$. De même, par symétrie $z \cdot x \leq z \cdot y$. □

On remarque donc que tout monoïde inversif muni de l'ordre naturel est un monoïde ordonné. On s'intéressera ensuite au rôle particulier des idempotents par rapport à l'ordre naturel.

Propriété 2.2.7. *Dans un monoïde inversif M, les sous-unités sont exactement les idempotents, i.e. $U(M) = E(M)$.*

Démonstration. Considérons un monoïde inversif M. Soit un idempotent $e \in E(M)$, c'est par définition de l'ordre naturel une sous-unité, puisque $e = e \cdot 1$.

Réciproquement, soit $x \in M$ tel que $x \leq 1$, alors par définition de l'ordre naturel, il existe un idempotent $e \in M$ tel que $x = e \cdot 1$, donc $x = e$, et x est donc un idempotent. □

Propriété 2.2.8. *Tout monoïde idempotent commutatif M_i ordonné par la relation d'ordre naturel est un $\wedge$-semitreillis avec $e_1 \wedge e_2 = e_1 \cdot e_2$ pour tous $e_1, e_2 \in M_i$,* *Démonstration.* Soient un monoïde idempotent commutatif M_i, et $e_1, e_2 \in M_i$.

D'une part, par définition de l'ordre naturel, on a $e_1 \cdot e_2 \leq e_1$ et $e_1 \cdot e_2 \leq e_2$.

D'autre part, soit $e \in M_i$ tel que

$$e \leq e_1 \text{ et } e \leq e_2,$$

alors il existe $x_1, x_2 \in M_i$ tels que

$$e = x_1 \cdot e_1 \text{ et } e = x_2 \cdot e_2.$$

Comme e est idempotent, $e = e \cdot e$ donc

$$e = x_1 \cdot e_1 \cdot x_2 \cdot e_2,$$

et comme les idempotents commutent,

$$e = x_1 \cdot x_2 \cdot e_1 \cdot e_2,$$

or M_i étant un monoïde idempotent, l'élément $x_1 \cdot x_2$ est idempotent, donc par définition de l'ordre naturel, $e \leq e_1 \cdot e_2$.

Par conséquent, $e_1 \wedge e_2$, le plus grand élément inférieur à e_1 et à e_2, existe et vaut $e_1 \cdot e_2$. □

Propriété 2.2.9. *Soit un monoïde inversif M, l'ensemble $E(M)$ des idempotents est un $\wedge$-semitreillis, vérifiant pour tous $e_1, e_2 \in U(M)$, $e_1 \wedge e_2 = e_1 \cdot e_2$.*

Démonstration. La propriété 2.2.2 montre que pour tout monoïde inversif M, l'ensemble $E(M)$ est clos par produit. Comme $E(M)$ contient l'élément 1, c'est un monoïde. De plus, d'après le lemme 2.2.3, les idempotents commutent, donc $E(M)$ est un monoïde idempotent commutatif. Cette propriété est donc une conséquence directe de la propriété 2.2.8. □

2.3 Projections, produits restreints, produits disjoints

Les projections droites et gauches, parfois également appelés reset et co-reset, sont des idempotents particulier ; outre leur importance dans le cadre des monoïdes inversifs, ils serviront à définir d'autres monoïdes particuliers, comme les monoïdes amples et les E-monoïdes.

Définition 2.3.1 (Projections droite et gauche)**.** Soit un monoïde inversif M, on définit pour tout élément $x \in M$:

- ▷ $x^R = x \cdot x^{-1}$,
- ▷ $x^L = x^{-1} \cdot x$.

La propriété suivante donne une autre caractérisation de ces projections :

Propriété 2.3.1. *Soient M un monoïde inversif, donc ordonné par l'ordre naturel, pour tout $x \in M$,*

- ▷ $x^R = min\{e \in E(M) \mid e \cdot x = x\}$,
- ▷ $x^L = min\{e \in E(M) \mid x \cdot e = x\}$.

Démonstration. Soit M un monoïde inversif, et soient $x \in M$ et l'ensemble $X_R = \{e \in E(M) \mid e \cdot x = x\}$. Comme $x = x \cdot x^{-1} \cdot x$, on a $x \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot x \cdot x^{-1}$ donc $x^R \in E(M)$. Et comme $x^R \cdot x = x \cdot x^{-1} \cdot x = x$, on a $x^R \in X_R$.

Soit $e \in X_R$, on a $e \cdot x_R = e \cdot x \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = x_R$. D'après la propriété 2.2.9, on a donc $e \wedge x^R = x^R$, donc $x^R \leq e$.

On démontre de manière analogue que $x^L = x^{-1} \cdot x$. □

Propriété 2.3.2. *Soit un monoïde inversif M, pour tout $e \in E(M)$, on a $e = e^R = e^L$.*

Démonstration. Soit M un monoïde inversif. Pour tout $e \in E(M)$, on a $e^R = e \cdot e^{-1} = e \cdot e = e$ et $e^L = e^{-1} \cdot e = e \cdot e = e$. □

Deux restrictions du produit dans les monoides inversifs méritent d'être explicité, car elles jouent un rôle important dans la suite de ce texte. La première, classique en théorie des monoides inversifs (voir Lawson [1998b], Chap. 4), est le produit restreint. La seconde, introduite plus récemment [Janin, 2012], n'est pas sans rapport avec la notion de produit *reduced as presented*[1] définit sur le groupe libre.

Définition 2.3.2. Soient un monoïde inversif M et $x, y \in M$, leur *produit restreint* $x \bullet y$ est défini quand $x^L = y^R$, et est égal à $x \cdot y$.

Définition 2.3.3. Soient un monoïde inversif M et $x, y \in M$, leur produit *disjoint* $x \star y$ est défini quand $x \cdot y \neq 0$ et $x^L \vee y^R = 1$, et est égal à $x \cdot y$.

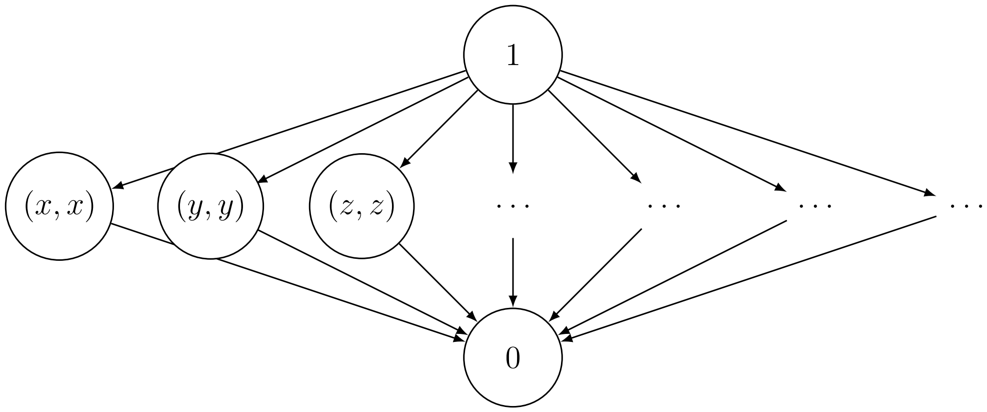
On notera $\exists x \bullet y$ (resp. $\exists x \star y$) le fait que le produit restreint $x \bullet y$ (resp. le produit disjoint $x \star y$) est défini. On considérera de plus le produit comme prioritaire sur les opérateurs $\bullet$ et $\star$, c'est-à-dire qu'on notera par exemple $x \cdot y \bullet z$ quand le produit restreint de $x \cdot y$ et de z est défini, et $x \cdot (y \bullet z)$ quand le produit restreint de y et de z est défini.

Exemple. Reprenons l'exemple du monoïde inversif $M = (S \times S) \cup \{1, 0\}$, du dernier exemple de la définition 2.2.2.

Par définition du produit, les idempotents sont 1, 0 et les paires de la forme (x, x). Le produit d'idempotents est commutatif : $1 \cdot (x, x) = (x, x) \cdot 1 = (x, x)$, $0 \cdot (x, x) = (x, x) \cdot 0 = 0$, et $(x, x) \cdot (y, y) = (y, y) \cdot (x, x) = 0$; ce qui illustre le lemme 2.2.3.

1. Soient $x, y \in FG(A)$. Le produit $x \cdot y$ est *reduced as presented* lorsque $xy = red(xy)$

Trivialement, l'ordre naturel restreint à $S \times S$ est l'identité : pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2, z \in S$, $(x_1, y_1) = (z, z) \cdot (x_2, y_2)$ si et seulement si $z = y_1$ et $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Par ailleurs, 1 est le plus grand élément de $E(M)$: pour tout $(x, x) \in E(M)$, $(x, x) = 1 \cdot (x, x)$. Enfin, 0 est minimum : pour tout $(x, y) \in M$, $0 = 0 \cdot (x, y)$. L'ordre naturel sur le monoïde inversif M est donc $Id_M \cup (E(M) \times 1) \cup (0 \times M)$, ce qui illustre la propriété 2.2.7. La propriété 2.2.9 est elle aussi illustrée par le semitreillis $E(M)$, qui est extrêmement simple :



Les projections droites et gauches sont donc $1^L = 1^R = 1$, $0^L = 0^R = 0$, et pour tout $(x, y) \in S \times S$, $(x, y)^L = (y, y)$ et $(x, y)^R = (x, x)$.

Le produit restreint est défini par $1 \bullet 1 = 1$, $0 \bullet 0 = 0$, pour tous $x, y, z \in S$, $(x, y) \bullet (y, z) = (x, z)$, et n'est pas défini dans les autres cas. Le produit disjoint est défini par $1 \star 1 = 1$, pour tous $x, y \in S$, $1 \star (x, y) = (x, y)$, et n'est pas défini dans les autres cas. En effet, pour tous $x_1, y_1, x_2, y_2 \in S$, on a $(x_1, y_1)^L \vee (x_2, y_2)^R = 1$ si $y_1 \neq x_2$, auquel cas $(x_1, y_1)^L \cdot (x_2, y_2)^R = 0$.

Chapitre 3

Monoïdes de tuiles

On appelle *tuiles* des structures finies avec une notion de chevauchement, due à la présence d'une racine d'entrée et d'une racine de sortie. Ces tuiles peuvent être arborescentes, on parle alors de bi-arbres, puisqu'elles se présentent alors essentiellement sous la forme d'arbres orientés à deux racines. On voit que l'ensemble des bi-arbres forme le monoïde inversif libre. Dans le cas linéaire, ces tuiles peuvent être simplement vues comme des mots munis de deux racines. Enfin, on introduit la notion de monoïdes amples, des monoïdes possédant la même notion de projection droite et gauche que les monoïdes inversifs, mais sans la notion d'inverse. On voit en particulier le cas du monoïde des tuiles positives, qui constitue le monoïde ample libre.

3.1 Le monoïde inversif libre

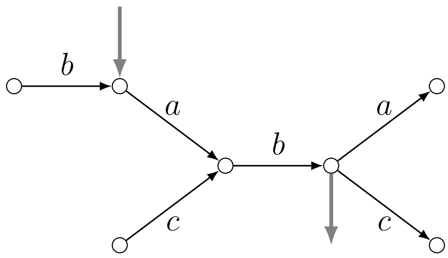
Le monoïde inversif libre, dont l'existence fut prouvée indépendamment par Wagner [1952] et Preston [1954], a été présenté comme ensemble d'arbres à deux racines par Scheiblich [1972] et Munn [1974]. C'est un exemple remarquable, dont la construction a été largement étudiée (on citera par exemple Margolis et Pin [1984] et Fountain *et al.* [2009]). On en donne ici une présentation qui insiste sur la vision des éléments du monoïde inversif libre comme des tuiles, i.e. des structures orientées non-linéaires avec une notion de chevauchement.

Définition 3.1.1. Un *bi-arbre* sur un alphabet A est une paire (P, u), où P est une partie finie de $FG(A)$ close par préfixe, et u est un élément de P. On nomme P le *domaine* du bi-arbre et u son *chemin racine*, ou *racine*.

Remarque. Un bi-arbre (P, u) peut être représenté par un graphe orienté, dont chaque sommet correspond à un élément du domaine, et chaque arc à une lettre. La figure 3.1 donne un exemple d'un tel graphe.

Le sommet correspondant à l'élément 1 est appelé *entrée*, et celui correspondant à u est appelé *sortie*.

FIGURE 3.1 – Le bi-arbre $(\{1, \bar{b}, a, ab, aba, abc, a\bar{c}\}, ab)$.



Définition 3.1.2. Soient deux bi-arbres $(P_1, u_1), (P_2, u_2)$, on définit leur produit par

$$(P_1, u_1) \cdot (P_2, u_2) = (P_1 \cup (u_1 \cdot P_2), u_1 \cdot u_2).$$

Exemple. Soient les bi-arbres

$$(P_1, u_1) = (\{1, \bar{c}, b, ba, bc\}, b) \text{ et } (P_2, u_2) = (\{1, \bar{b}, \bar{b}\bar{a}, \bar{b}\bar{a}\bar{b}, a, a\bar{c}, c\}, c),$$

leur produit est

$$(P_1, u_1) \cdot (P_2, u_2) = (\{1, \bar{a}, \bar{a}\bar{b}, \bar{c}, b, ba, ba\bar{c}, bc\}, bc),$$

comme illustré figure 3.2.

Informellement, on obtient l'inverse d'un bi-arbre en échangeant son entrée et sa sortie, comme illustré figure 3.3.

Propriété 3.1.1. *L'ensemble $FIM(A)$ des bi-arbres sur A muni du produit est un monoïde inversif avec le bi-arbre vide $1 = (\{1\}, 1)$ pour élément neutre et $(\bar{u} \cdot P, \bar{u})$ pour inverse de tout bi-arbre (P, u).*

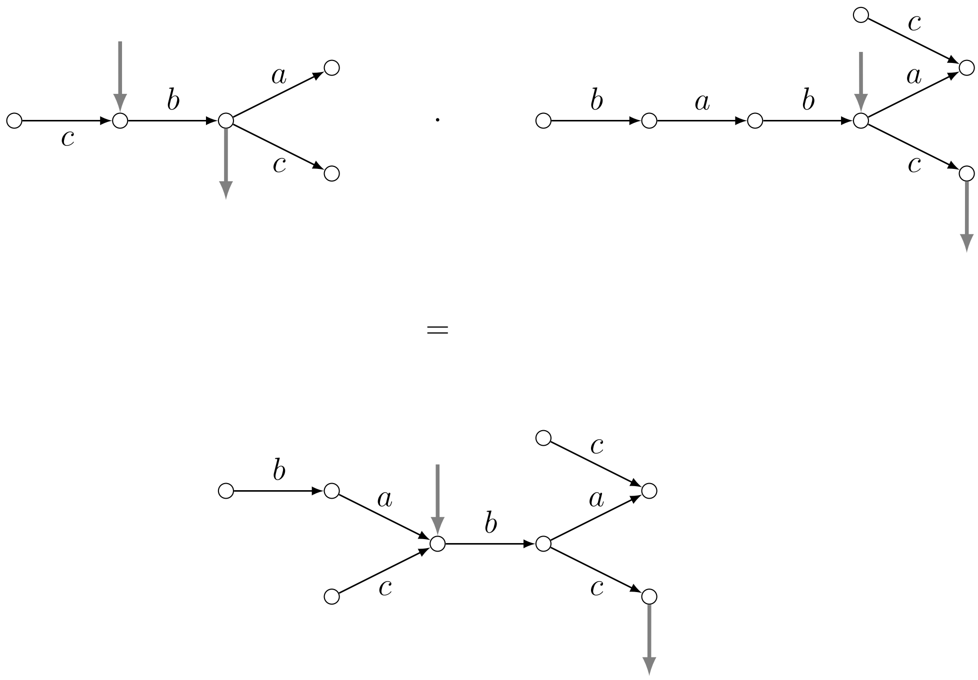
Démonstration. Premièrement, on montre que le produit de bi-arbres est associatif : soient trois bi-arbres $(P_1, u_1), (P_2, u_2), (P_3, u_3) \in FIM(A)$, on a

$$\begin{aligned}((P_1, u_1) \cdot (P_2, u_2)) \cdot (P_3, u_3) &= (P_1 \cup u_1 \cdot P_2, u_1 \cdot u_2) \cdot (P_3, u_3) \\ &= (P_1 \cup u_1 \cdot P_2 \cup u_1 \cdot u_2 \cdot P_3, u_1 \cdot u_2 \cdot u_3) \\ &= (P_1, u_1) \cdot (P_2 \cup u_2 \cdot P_3, u_2 \cdot u_3) \\ &= (P_1, u_1) \cdot ((P_2, u_2) \cdot (P_3, u_3)).\end{aligned}$$

De plus, on montre que $1 = (\{1\}, 1)$ est un élément neutre : soit le bi-arbre $(P, u) \in FIM(A)$, on a

$$\begin{aligned}(P, u) \cdot 1 &= (P, u) \cdot (\{1\}, 1) \\ &= (P \cup u \cdot \{1\}, u \cdot 1) \\ &= (P \cup \{u\}, u) \\ &= (P, u),\end{aligned}$$

Figure 3.2 – Représentation du produit de bi-arbres sous forme de graphes.



et de même

$$\begin{aligned}1 \cdot (P, u) &= (\{1\}, 1) \cdot (P, u)\\ &= (\{1\} \cup 1 \cdot P, 1 \cdot u)\\ &= (P, u).\end{aligned}$$

Enfin, pour tout bi-arbre (P, u), on remarque qu'il possède une unique inverse $(P, u)^{-1} = (\bar{u} \cdot P, \bar{u})$; en effet,

$$\begin{aligned}(P, u) \cdot (\bar{u} \cdot P, \bar{u}) \cdot (P, u) &= (P \cup u \cdot \bar{u} \cdot P, u \cdot \bar{u}) \cdot (P, u)\\ &= (P \cup 1 \cdot P, 1) \cdot (P, u)\\ &= (P, 1) \cdot (P, u)\\ &= (P \cup 1 \cdot P, 1 \cdot u)\\ &= (P, u)\end{aligned}$$

et réciproquement, soit une inverse (P', u') de (P, u), alors

$$\begin{aligned}(P, u) &= (P, u) \cdot (P', u') \cdot (P, u)\\ &= (P \cup u \cdot P', u \cdot u') \cdot (P, u)\\ &= (P \cup u \cdot P' \cup u \cdot u' \cdot P, u \cdot u' \cdot u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(P', u') &= (P', u') \cdot (P, u) \cdot (P', u')\\ &= (P' \cup u' \cdot P, u' \cdot u)(P', u')\\ &= (P' \cup u' \cdot P \cup u' \cdot u \cdot P', u' \cdot u \cdot u').\end{aligned}$$

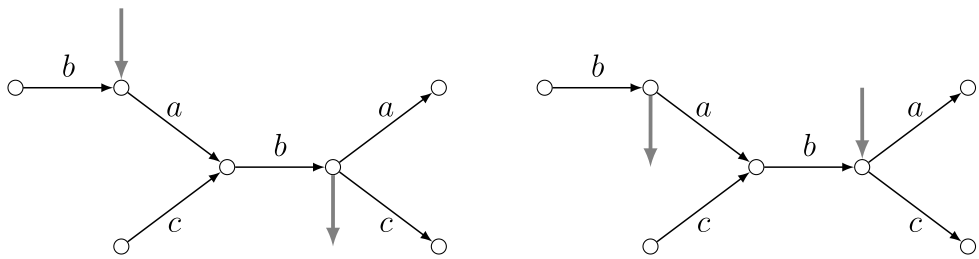
On a donc $u = u \cdot u' \cdot u$, d'où $\bar{u} \cdot u = \bar{u} \cdot u \cdot u' \cdot u$. On a donc $1 = u' \cdot u$, donc $u' = \bar{u}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}P &= P \cup u \cdot P' \cup u \cdot u' \cdot P\\ &= P \cup u \cdot P' \cup u \cdot \bar{u} \cdot P\\ &= P \cup u \cdot P' \cup 1 \cdot P\\ &= P \cup u \cdot P'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P' &= P' \cup u' \cdot P \cup u' \cdot u \cdot P'\\ &= P' \cup \bar{u} \cdot P \cup \bar{u} \cdot u \cdot P'\\ &= P' \cup \bar{u} \cdot P \cup 1 \cdot P'\\ &= P' \cup \bar{u} \cdot P\end{aligned}$$

par conséquent $u \cdot P' \subseteq P$, et $\bar{u} \cdot P \subseteq P'$. Or $P' = \bar{u} \cdot u \cdot P'$ donc $P' \subseteq \bar{u} \cdot P$, et donc $P' = \bar{u} \cdot P$. On a donc $(P', u') = (\bar{u} \cdot P, \bar{u}) = (P, u)^{-1}$. □

FIGURE 3.3 – Le bi-arbre $(\{1, \bar{b}, a, ab, aba, abc, a\bar{c}\}, ab)$ et son inverse.



Propriété 3.1.2. *Les* idempotents *de $FIM(A)$ sont les bi-arbres de racine* 1.

Démonstration. Pour tout bi-arbre $(P, u) \in FIM(A)$, si $u = 1$, alors $(P, 1) \cdot (P, 1) = (P \cup 1 \cdot P, 1 \cdot 1) = (P, 1)$. Réciproquement, si $(P, u) \cdot (P, u) = (P, u)$, alors $(P, u) = (P \cup u \cdot P, u \cdot u)$, donc $u = u \cdot u$, donc $u = 1$. □

Propriété 3.1.3. *Soient deux bi-arbres* $(P_1, u_1), (P_2, u_2) \in FIM(A)$*. Alors* $(P_1, u_1) \leq (P_2, u_2)$ *au sens de l'*ordre naturel *si et seulement si* $u_1 = u_2$ *et* $P_2 \subseteq P_1$*, c'est à dire quand* (P_2, u_2) *est un sous arbre de* (P_1, u_1) *possédant même entrée et même sortie.*

Démonstration. Soient deux bi-arbres $(P_1, u_1), (P_2, u_2) \in FIM(A)$, tels que $(P_1, u_1) \leq (P_2, u_2)$, alors il existe $(P, 1) \in FIM(A)$ tel que

$$(P_1, u_1) = (P, 1) \cdot (P_2, u_2) = (P \cup P_2, u_2),$$

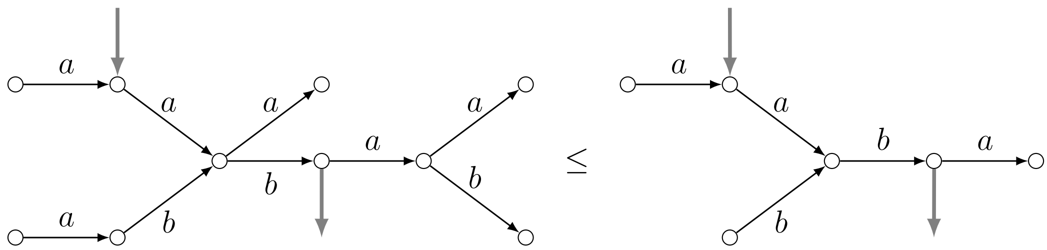
donc $P_2 \subseteq P_1$ et $u_1 = u_2$. Réciproquement, si $u_1 = u_2$ et $P_2 \subseteq P_1$, alors

$$\begin{aligned}(P_1, 1) \cdot (P_2, u_2) &= (P_1 \cup 1 \cdot P_2, 1 \cdot u_2)\\ &= (P_1, u_2)\\ &= (P_1, u_1),\end{aligned}$$

donc $(P_1, u_1) \leq (P_2, u_2)$. □

La figure 3.4 donne l'illustration de cette propriété.

FIGURE 3.4 – $(P_1, u_1) = (\{1, a, a\bar{b}, a\bar{b}\bar{a}, aa, ab, aba, abaa, abab, \bar{a}\}, ab)$ est inférieur à $(P_2, u_2) = (\{1, a, a\bar{b}, ab, aba, \bar{a}\}, ab)$; en effet, $u_1 = u_2$ et $P_2 \subseteq P_1$.



On remarque donc que les bi-arbres maximaux sont ceux qui contiennent uniquement leur racine et ses préfixes :

Propriété 3.1.4. *L'ensemble des éléments maximaux de* $FIM(A)$ *est isomorphe au groupe libre ; ce sont les bi-arbres de la forme* $(pref(u), u)$ *avec* $u \in FG(A)$*.*

Démonstration. On rappelle que par définition, tout bi-arbre (P, u) vérifie $u \in P$, donc par clôture préfixe de P, on a $pref(u) \subseteq P$.

Tous les éléments de $FIM(A)$ de la forme $(pref(u), u)$ avec $u \in FG(A)$ sont maximaux. En effet, tout bi-arbre (P, v) doit vérifier soit $v = u$, donc $pref(u) \subseteq P$ et $(P, v) \leq (pref(u), u)$, soit $v \neq u$, donc d'après la propriété 3.1.3 ci-dessus, $(pref(u), u) \nleq (P, v)$.

Réciproquement, soit un élément de $FIM(A)$ de la forme (P, u) avec $P \neq pref(u)$. D'après la propriété 3.1.3, on a $(P, u) < (pref(u), u)$, donc (P, u) n'est pas maximal.

Les éléments maximaux de $FIM(A)$ sont donc les bi-arbres de la forme $(pref(u), u)$ avec $u \in FG(A)$, et il existe bien un morphisme bijectif φ entre $FG(A)$ et l'ensemble de ces éléments, défini par $\varphi(u) = (pref(u), u)$ pour tout $u \in A^*$.

□

Informellement, on obtient la projection droite d'un bi-arbre en déplaçant sa racine de sortie sur sa racine d'entrée, et on obtient sa projection gauche en déplaçant sa racine d'entrée sur sa racine de sortie, comme illustré figure 3.5.

Lemme 3.1.5. *Pour tout bi-arbre $(P, u) \in FIM(A)$, ses projections droite et gauche vérifient*

- ▷ $(P, u)^R = (P, 1)$,
- ▷ $(P, u)^L = (\bar{u} \cdot P, 1)$.

Démonstration. Soit un bi-arbre $(P, u) \in FIM(A)$. D'après la définition 2.3.1, on a

$$\begin{aligned}
(P, u)^R &= (P, u) \cdot (P, u)^{-1} \\
&= (P, u) \cdot (\bar{u} \cdot P, \bar{u}) \\
&= (P \cup u \cdot \bar{u} \cdot P, u \cdot \bar{u}) \\
&= (P \cup 1 \cdot P, 1) \\
&= (P, 1).
\end{aligned}$$

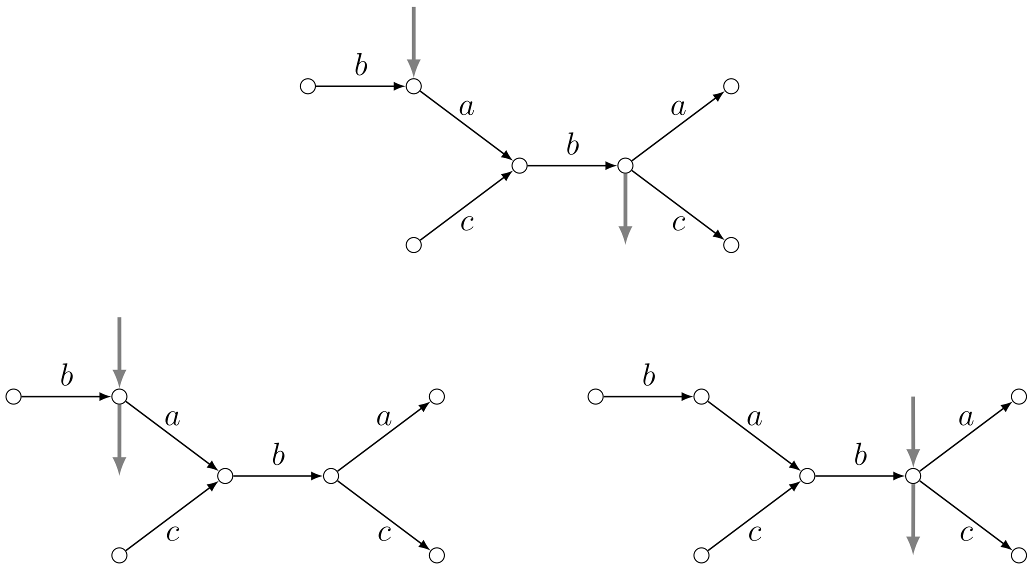
De même, par définition de la projection gauche,

$$\begin{aligned}
(P, u)^L &= (P, u)^{-1} \cdot (P, u) \\
&= (\bar{u} \cdot P, \bar{u}) \cdot (P, u) \\
&= (\bar{u} \cdot P \cup \bar{u} \cdot P, \bar{u} \cdot u) \\
&= (\bar{u} \cdot P, 1).
\end{aligned}$$

□

La représentation des éléments de $FIM(A)$ sous forme de graphe permet une visualisation des notions de produit restreint et de produit disjoint. Informellement, le produit restreint est défini lorsque les domaines des deux bi-arbres se recouvrent parfaitement, la sortie du premier coïncidant avec l'entrée du second, comme illustré figure 3.6. Au contraire, le produit disjoint est défini lorsque le domaine du premier bi-arbre et le translaté du domaine du second n'ont qu'un seul sommet en commun : la sortie du premier et l'entrée du second, comme illustré figure 3.7.

FIGURE 3.5 – Le bi-arbre $(\{1, \bar{b}, a, ab, aba, abc, a\bar{c}\}, ab)$, sa projection droite et sa projection gauche.



Lemme 3.1.6. *Le* produit restreint *des bi-arbres* $(P_1, u_1), (P_2, u_2) \in FIM(A)$ *est défini quand* $\bar{u}_1 \cdot P_1 = P_2$.

Le produit disjoint *des bi-arbres* $(P_1, u_1), (P_2, u_2) \in FIM(A)$ *est défini si et seulement si* $(\bar{u}_1 \cdot P_1, 1) \vee (P_2, 1) = 1$.

Démonstration. Soient les bi-arbres $(P_1, u_1), (P_2, u_2) \in FIM(A)$, le produit restreint $(P_1, u_1) \bullet (P_2, u_2)$ est défini quand $(P_1, u_1)^L = (P_2, u_2)^R$, c'est-à-dire quand $(\bar{u}_1 \cdot P_1, 1) = (P_2, 1)$, i.e. quand $\bar{u}_1 \cdot P_1 = P_2$.

Par ailleurs leur produit disjoint $(P_1, u_1) \star (P_2, u_2)$ est défini quand $(P_1, u_1)^L \vee (P_2, u_2)^R = 1$, soit $(\bar{u}_1 \cdot P_1, 1) \vee (P_2, 1) = 1$. □

Enfin, une notion importante sur les bi-arbres est celle de bi-arbres positifs et négatifs.

Définition 3.1.3. Un bi-arbre (P, u) sur un alphabet A est positif quand $u \in A^*$, et il est négatif quand $u \in \bar{A}^*$. On nomme $FIM^+(A)$ l'ensemble des bi-arbres positifs.

Si on représente un bi-arbre sous forme de graphe, il est donc positif si il existe un chemin orienté de son entrée à sa sortie, et il est négatif si il existe un chemin orienté de sa sortie à son entrée. On remarque donc que l'inverse d'un bi-arbre positif est négative, et vice-versa, c.f. figure 3.3. On remarque également que les idempotents sont à la fois positifs et négatifs.

FIGURE 3.6 – Le produit restreint des bi-arbres $(\{1, \bar{b}, a, ab, aba, aba\bar{c}, abc, a\bar{c}\}, ab)$ et $(\{1, \bar{b}, \bar{b}\bar{a}, \bar{b}\bar{a}\bar{b}, \bar{b}\bar{c}, a, a\bar{c}, c\}, c)$.

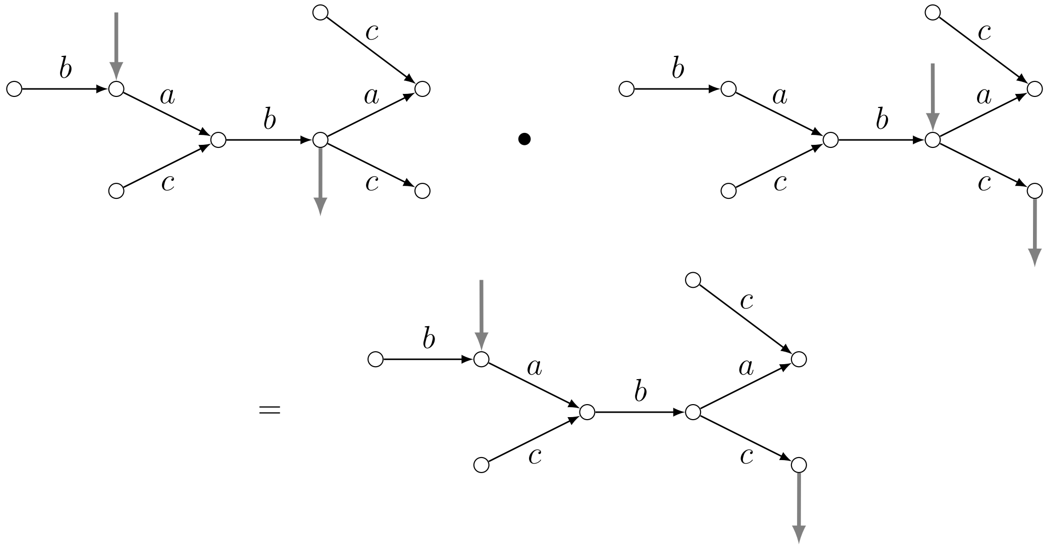
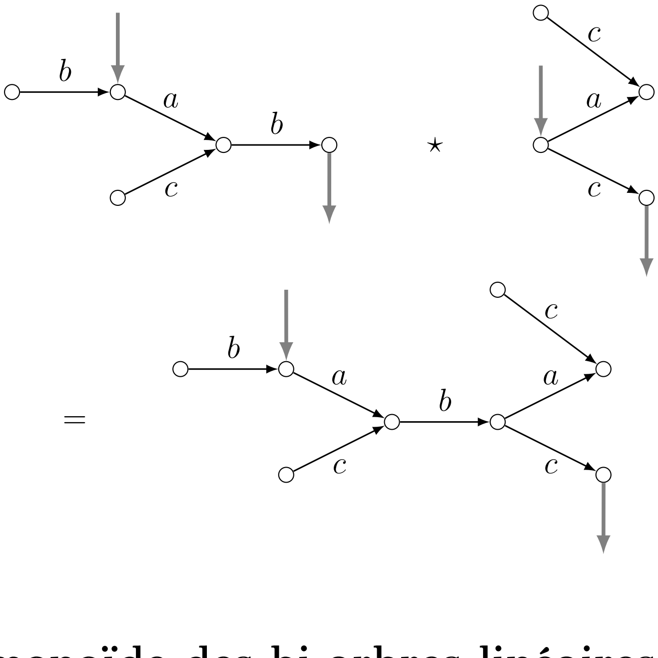


FIGURE 3.7 – Le produit disjoint des bi-arbres $(\{1, \bar{b}, a, ab, a\bar{c}\}, ab)$ et $(\{1, a, a\bar{c}, c\}, c)$.



3.2 Le monoïde des bi-arbres linéaires

Le cas particulier des tuiles linéaires peut être vu comme un sous-ensemble du monoïde inversif libre, celui des bi-arbres dont les sommets forment un chemin orienté (McAlister [1973],Lawson [1998a]).

Définition 3.2.1. Un bi-arbre $(P, u) \in FIM(A)$ est *linéaire* quand il existe deux mots $v_l, v_r \in A^*$ tels que $P = pref\{\bar{v}_l, v_r\}$.

Le caractère linéaire de ces bi-arbres est illustré par leur représentation sous forme de graphes orientés, c.f. figures 3.8 et 3.9.

FIGURE 3.8 – Le bi-arbre linéaire positif (P, u) ci-dessous a pour domaine $pref\{\bar{v}_l, v_r\}$, avec $u = aabc$, $\bar{v}_l = \overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$, $v_r = aabcac$.

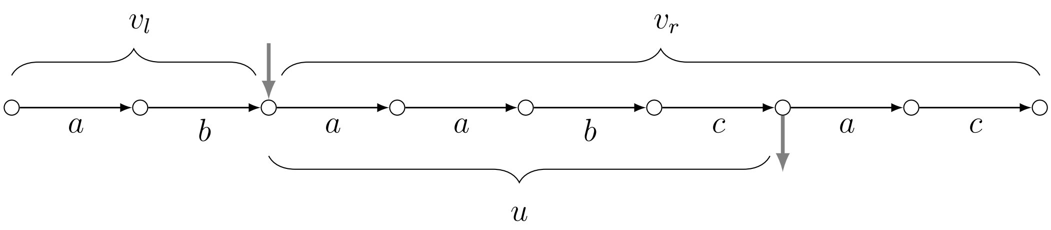
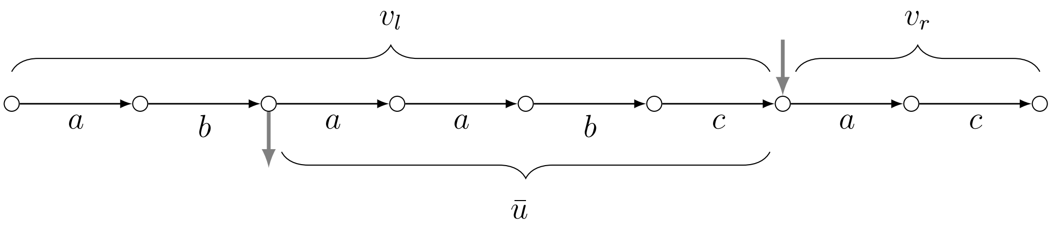


FIGURE 3.9 – Le bi-arbre linéaire négatif (P, u) ci-dessous a pour domaine $pref\{\bar{v}_l, v_r\}$, avec $u = \overline{aabc} = \bar{c}\bar{b}\bar{a}\bar{a}$, $\bar{v}_l = \overline{abaabc} = \bar{c}\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{a}$, $v_r = ac$.



On nomme $\perp_A$ l'ensemble des bi-arbres non-linéaires.

D'après la définition 3.2.1, un bi-arbre $(P, u) \in FIM(A)$ est linéaire quand il existe $v_r, v_l \in A^*$ tels que $P = pref(v_r) \cup pref(\bar{v}_l)$, c'est-à-dire quand $P \cap A^* = pref(v_r)$ et $P \cap \bar{A}^* = pref(\bar{v}_l)$ et $P \subseteq A^* \cup \bar{A}^*$.

Par conséquent, pour tout bi-arbre $(P, u) \in FIM(A)$, on a $(P, u) \in \perp_A$ si P vérifie l'une des propriétés suivantes :

i. Il existe $w_1, w_2 \in P \cap A^*$ tels que $w_1 \vee_p w_2 = 0$.

ii. Il existe $w_1, w_2 \in P \cap \bar{A}^*$ tels que $w_1 \vee_p w_2 = 0$.

iii. Il existe $w \in FG(A)$ et $(x, y) \in (A \times \bar{A}) \cup (\bar{A} \times A)$ tels que $wxy \in P$.

Lemme 3.2.1. *L'ensemble $\perp_A$ est un idéal.*

Démonstration. Soient $(P_1, u_1) \in \perp_A$ et $(P_2, u_2) \in FIM(A)$. On montre que $\perp_A$ est un idéal à droite. Par définition du produit,

$$(P_1, u_1) \cdot (P_2, u_2) = (P_1 \cup u_1 \cdot P_2, u_1 \cdot u_2).$$

(i) S'il existe $w_1, w_2 \in P_1 \cap A^*$ tels que $w_1 \vee_p w_2 = 0$, on a

$$w_1, w_2 \in (P_1 \cup u_1 \cdot P_2) \cap A^*.$$

On a donc $(P_1, u_1) \cdot (P_2, u_2) \in \perp_A$.

(ii) S'il existe $w_1, w_2 \in P_1 \cap \bar{A}^*$ tels que $w_1 \vee_p w_2 = 0$, on a

$$w_1, w_2 \in (P_1 \cup u_1 \cdot P_2) \cap \bar{A}^*.$$

On a donc $(P_1, u_1) \cdot (P_2, u_2) \in \perp_A$.

(iii) S'il existe $w \in FG(A)$ et $(x, y) \in (A \times \bar{A}) \cup (\bar{A} \times A)$ tels que $wxy \in P$, on a

$$wxy \in P_1 \cup u_1 \cdot P_2.$$

On a donc $(P_1, u_1) \cdot (P_2, u_2) \in \perp_A$.

On montre également que $\perp_A$ est un idéal à gauche. Si $(P_2, u_2) \in \perp_A$, comme $\perp_A$ est un idéal à droite, on a $(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1) \in \perp_A$.

Si $(P_2, u_2) \notin \perp_A$, on a $u_2 \in A^*$ ou $u_2 \in \bar{A}^*$. Par définition du produit,

$$(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1) = (P_2 \cup u_2 \cdot P_1, u_2 \cdot u_1).$$

On nomme $P = P_2 \cup u_2 \cdot P_1$ le domaine de $(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1)$.

(i) S'il existe $w_1, w_2 \in P_1 \cap A^*$ tels que $w_1 \vee_p w_2 = 0$, il existe $w, w_1', w_2' \in A^*$ et $a_1, a_2 \in A$ tels que $w_1 = wa_1w_1'$ et $w_2 = wa_2w_2'$.

Si $u_2 \in A^*$, on a $u_2 \cdot w_1 = u_2w_1 \in P \cap A^*$ et $u_2 \cdot w_2 = u_2w_2 \in P \cap A^*$. Or

$$u_2 \cdot w_1 \vee_p u_2 \cdot w_2 = u_2wa_1w_1' \vee_p u_2wa_2w_2' = 0.$$

Donc $(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1) \in \perp_A$.

Si $u_2 \in \bar{A}^*$, on a trois possibilités.

Si $\bar{u}_2 \leq_p w$, alors $u_2 \cdot w \in A^*$. On a donc $u_2 \cdot w_1 = (u_2 \cdot w)a_1w_1' \in P \cap A^*$ et $u_2 \cdot w_2 = (u_2 \cdot w)a_2w_2' \in P \cap A^*$. Or

$$u_2 \cdot w_1 \vee_p u_2 \cdot w_2 = (u_2 \cdot w)a_1w_1' \vee_p (u_2 \cdot w)a_2w_2' = 0.$$

Donc $(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1) \in \perp_A$.

Si $w <_p \bar{u}_2$, alors $u_2 \cdot w \in \bar{A}^*$. Comme $\bar{u}_2(|w|+1) \neq a_1$ ou $\bar{u}_2(|w|+1) \neq a_2$, on a $u_2 \cdot w_1 = (u_2 \cdot w)a_1w_1'$ ou $u_2 \cdot w_2 = (u_2 \cdot w)a_2w_2'$. Or $u_2 \cdot w_1 \in P$ et $u_2 \cdot w_2 \in P$, donc par clôture préfixe de P, on a $(u_2 \cdot w)a_1 \in P$ ou $(u_2 \cdot w)a_2 \in P$. Comme $(u_2 \cdot w) \in \bar{A}^*$, sa dernière lettre est donc un élément de $\bar{A}$, l'ensemble P vérifie donc **iii**, i.e. $(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1) \in \perp_A$.

Si $w \vee_p \bar{u}_2 = 0$, alors $u_2 \cdot w_1 = u_2 \cdot wa_1w_1' \notin A^* \cup \bar{A}^*$. Or $u_2 \cdot w_1 \in P$, donc $P \not\subseteq A^* \cup \bar{A}^*$, i.e. $(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1) \in \perp_A$.

(ii) S'il existe $w_1, w_2 \in P_1 \cap \bar{A}^*$ tels que $w_1 \vee_p w_2 = 0$, on démontre de manière symétrique au cas précédent que $(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1) \in \perp_A$.

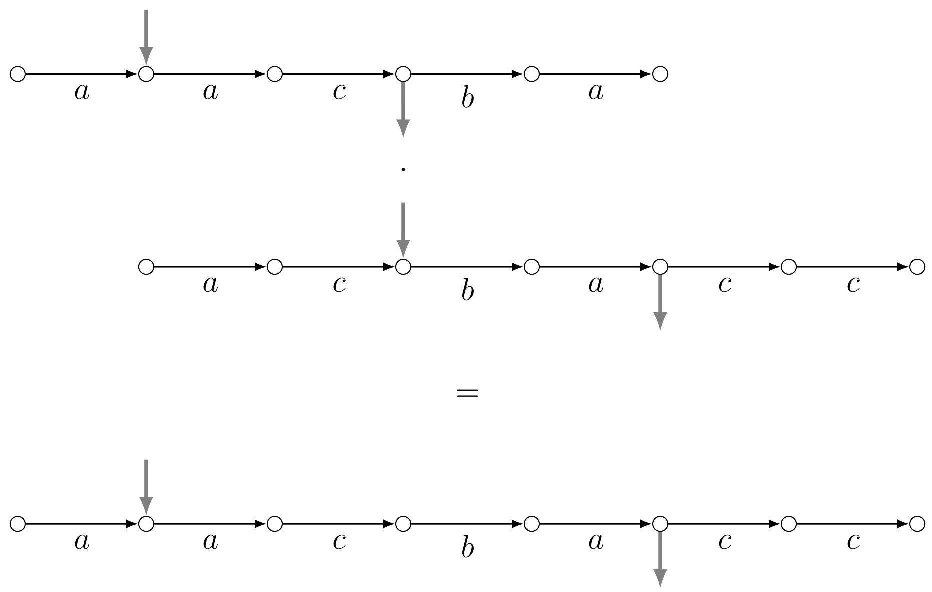
(iii) S'il existe $w \in FG(A)$ et $(x, y) \in (A \times \bar{A}) \cup (\bar{A} \times A)$ tels que $wxy \in P_1$. Si $u_2 = \bar{x}\bar{w}$ on a $u_2 \cdot (wxy) = \bar{x}\bar{w} \cdot (wxy) = y$. Or, par clôture préfixe de P, comme $u_2 = \bar{x}\bar{w} \in P$, on a $\bar{x} \in P$. Comme $(x, y) \in (A \times \bar{A}) \cup (\bar{A} \times A)$, on a $\bar{x}, y \in A$ ou $\bar{x}, y \in \bar{A}$. Donc comme $\bar{x}, y \in P$, l'ensemble P vérifie **i** ou **ii**, i.e. $(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1) \in \perp_A$.

Si $u_2 \neq \bar{x}\bar{w}$, ou bien $u_2 = \bar{y}\bar{x}\bar{w}$ auquel cas $u_2 \notin A^* \cup \bar{A}^*$, ou bien $u_2 \cdot (wxy) \notin A^* \cup \bar{A}^*$. Donc $P \nsubseteq A^* \cup \bar{A}^*$, i.e. $(P_2, u_2) \cdot (P_1, u_1) \in \perp_A$. □

$\perp_A$ étant un idéal, on considère le monoïde des bi-arbres linéaires $FIM_L(A) = FIM(A)/\perp_A$. L'ensemble $FIM_L(A)$ est donc l'ensemble des bi-arbres linéaires muni du zéro, où le produit vaut zéro si son résultat dans $FIM(A)$ serait un bi-arbre non-linéaire.

Les figures 3.10 et 3.11 offrent une représentation du produit de deux bi-arbres linéaires dans les deux cas, lorsqu'il est nul et non-nul.

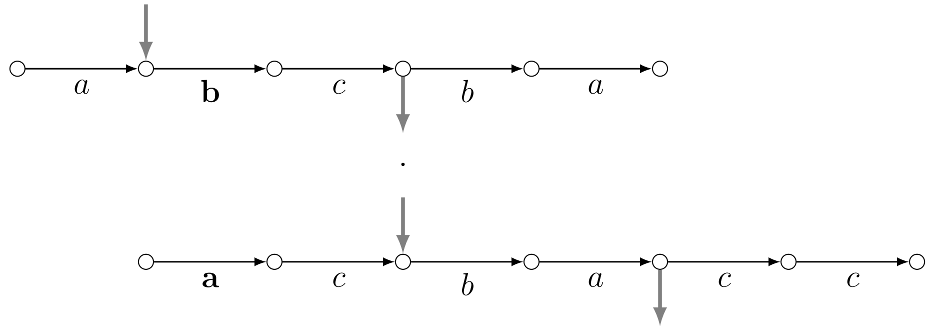
FIGURE 3.10 – Le produit des tuiles linéaires $t_1 = (\{1, a, ac, acb, acba, \bar{a}\}, ac)$ et $t_2 = (\{b, ba, bac, bacc, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}\}, ba)$ est $(\{1, a, ac, acb, acba, acbac, acbacc, \bar{a}\}, acba)$.



Théorème 3.2.2 (Lawson [1998b])**.** *Le monoïde $FIM_L(A)$ est un monoïde inversif.*

Démonstration. On obtient l'inverse d'un bi-arbre en échangeant son entrée et sa sortie, par conséquent l'inverse d'un bi-arbre linéaire est linéaire.

FIGURE 3.11 – En revanche, le produit des tuiles $(\{1, \mathbf{b}, \mathbf{b}c, \mathbf{b}cb, \mathbf{b}cba, \bar{a}\}, ac)$ et $(\{b, ba, bac, bacc, \bar{c}, \bar{c}\bar{\mathbf{a}}\}, ba)$ vaut 0. Les arêtes en gras, étiquetées différemment, ne peuvent être unifiées, et le produit ne peut donc pas être une tuile linéaire.



De plus, l'élément 0 est sa propre inverse car $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$. Cette inverse est unique puisque pour tout $t \in FIM_L(A)$, on a $t \cdot 0 \cdot t = 0$.

$FIM_L(A)$ est donc un sous-monoïde de $FIM(A)$ clos par inverse, c'est donc un monoïde inversif. $\square$

3.3 Les bi-arbres linéaires : des triplets de mots

On peut représenter de manière plus intuitive un bi-arbre linéaire par un triplet de mots ou son inverse. Nous en donnerons ici la définition et nous verrons l'équivalence des deux définitions.

Définition 3.3.1. Une *tuile linéaire* positive non-nulle sur un alphabet A est un triplet $(u_1, u_2, u_3) \in A^* \times A^* \times A^*$ avec $u_1, u_2, u_3 \in A^*$.

Une tuile linéaire négative non-nulle sur un alphabet A est un triplet $(u_1u_2, \bar{u}_2, u_2u_3) \in A^* \times \bar{A}^* \times A^*$ avec $u_1, u_2, u_3 \in A^*$.

On nomme $\mathcal{T}(A)$ l'ensemble des tuiles linéaires non-nulles sur A, et $\mathcal{T}_0(A)$ ce même ensemble muni du zéro 0.

Bien que l'on puisse voir l'ensemble des tuiles linéaire de manière symétrique, comme l'ensemble des tuiles positives (u, v, w) et des tuiles négatives $(u, v, w)^{-1}$, $\mathcal{T}(A)$ offre une présentation plus appropriée, notamment aux automates, en offrant pour toutes les tuiles un découpage entre contexte gauche (chemin allant du début à l'entrée), chemin racine, et contexte droit (chemin allant de la sortie à la fin).

Définition 3.3.2. On définit l'opération de produit sur $\mathcal{T}_0(A)$ par 0 est un zéro, et pour tous $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}(A)$, si $u_1 \cdot u_2 \vee_s v_1 \neq 0$ et $u_3 \vee_s v_2 \cdot v_3 \neq 0$, alors

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = ((u_1 \cdot u_2 \vee_s v_1) \cdot \bar{u}_2, u_2 \cdot v_2, \bar{v}_2 \cdot (u_3 \vee_s v_2 \cdot v_3)),$$

sinon $(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0$.

On remarque donc que $\mathcal{T}_0(A)$ muni du produit possède un zéro 0, et a pour élément neutre la tuile $1 = (1, 1, 1)$.

Définition 3.3.3. On définit l'inverse de toute tuile de $\mathcal{T}_0(A)$ par

- ▷ $0^{-1} = 0$,
- ▷ pour toute (u_1, u_2, u_3) positive, $(u_1, u_2, u_3)^{-1} = (u_1u_2, \bar{u}_2, u_2u_3)$,
- ▷ pour toute $(u_1u_2, \bar{u}_2, u_2u_3)$ négative, $(u_1u_2, \bar{u}_2, u_2u_3)^{-1} = (u_1, u_2, u_3)$.

Théorème 3.3.1. *$\mathcal{T}_0(A)$ est un monoïde inversif, et il existe un morphisme de monoïdes inversifs bijectif de $\mathcal{T}_0(A)$ dans $FIM_L(A)$.*

Démonstration. Cette preuve sera l'objet des propriétés 3.3.2 à 3.3.6. En particulier, ce théorème est une conséquence des propriété 3.3.5 et 3.3.6. □

Afin de démontrer ce théorème, on définit l'application $f : \mathcal{T}_0(A) \to FIM_L(A)$ par

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, u_3) &= (\mathit{pref}\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}, u_2) \text{ pour tout } (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{T}(A), \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Propriété 3.3.2. *Pour toute tuile $t \in \mathcal{T}_0(A)$, on a $f(t^{-1}) = f(t)^{-1}$.*

Démonstration. Soit $t \in \mathcal{T}_0(A)$. Si $t = 0$, $f(0^{-1}) = 0 = f(0)^{-1}$.

Dans le cas où t est positif, on a $t = (u_1, u_2, u_3)$, alors

$$\begin{aligned} f(t^{-1}) &= f(u_1 \cdot u_2, \bar{u}_2, u_2 \cdot u_3) \\ &= (\mathit{pref}\{\overline{u_1 \cdot u_2}, \bar{u}_2 \cdot u_2 \cdot u_3\}, \bar{u}_2) \\ &= (\mathit{pref}\{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1, \bar{u}_2 \cdot u_2 \cdot u_3\}, \bar{u}_2) \\ &= (\mathit{pref}\{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1, u_3\}, \bar{u}_2). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} f(t)^{-1} &= (\mathit{pref}\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}, u_2)^{-1} \\ &= (\bar{u}_2 \cdot \mathit{pref}\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}, \bar{u}_2) \\ &= (\mathit{pref}\{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1, \bar{u}_2 \cdot u_2 \cdot u_3\}, \bar{u}_2) \\ &= (\mathit{pref}\{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1, u_3\}, \bar{u}_2). \end{aligned}$$

Donc $f(t^{-1}) = f(t)^{-1}$.

Dans le cas où t est négatif, on a $t = (u_1u_2, \bar{u}_2, u_2u_3)$, alors

$$\begin{aligned} f(t^{-1}) &= f(u_1, u_2, u_3) \\ &= (\mathit{pref}\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}, u_2) \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} f(t)^{-1} &= (pref\{\overline{u_1 \cdot u_2}, \bar{u}_2 \cdot u_2 \cdot u_3\}, \bar{u}_2)^{-1} \\ &= (pref\{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2, u_3\}, \bar{u}_2)^{-1} \\ &= (u_2 \cdot pref\{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1, u_3\}, u_2)^{-1} \\ &= (pref\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}, u_2). \end{aligned}$$

Donc $f(t^{-1}) = f(t)^{-1}$. □

Afin de vérifier que le produit est nul dans $FIM_L(A)$ si et seulement si il l'est dans $\mathcal{T}_0(A)$, on commencera par examiner les conditions pour que le produit de deux bi-arbres de $FIM_L(A)$ soit non-nul grâce à la propriété suivante ; elle est illustrée par les figures 3.13 et 3.14.

Propriété 3.3.3. *Soient deux bi-arbres linéaires non-nuls $t_1 = (pref\{u_r, \bar{u}_l\}), u)$ et $t_2 = (pref\{v_r, \bar{v}_l\}, v)$, avec $u_r, u_l, v_r, v_l \in A^*$, alors $t_1 \cdot t_2 \neq 0$ si et seulement si $u_l \cdot u \vee_s v_l \neq 0$ et $\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r \neq 0$.*

Démonstration. Soient deux bi-arbres linéaires $t_1 = (pref\{u_r, \bar{u}_l\}, u)$ et $t_2 = (pref\{v_r, \bar{v}_l\}, v)$, avec $u_r, u_l, v_r, v_l \in A^*$. Leur produit $t_1 \cdot t_2$ dans $FIM_L(A)$ est non-nul si et seulement si le domaine P de leur produit dans $FIM(A)$ est de la forme $pref\{w_r, \bar{w}_l\}$ avec $w_r, w_l \in A^*$. Remarquons que

$$P = pref\{u_r, \bar{u}_l\} \cup \; u \cdot pref\{v_r, \bar{v}_l\}$$

$$P = pref\{u_r, \bar{u}_l, u \cdot v_r, u \cdot \bar{v}_l\} \tag{3.1}$$

$$P = pref\{u \cdot \bar{u} \cdot u_r, u \cdot \bar{u} \cdot \bar{u}_l, u \cdot v_r, u \cdot \bar{v}_l\}. \tag{3.2}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $u_l \cdot u \vee_s v_l \neq 0$ et $\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r \neq 0$. Par clôture préfixe, on factorise $u \cdot \bar{u} \cdot u_r$ et $u \cdot v_r$ dans (3.2), on a donc

$$P = pref\{u \cdot (\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r), u \cdot \bar{u} \cdot \bar{u}_l, u \cdot \bar{v}_l\}.$$

Comme $u_l \cdot u \vee_s v_l \neq 0$, d'après le corollaire 2.1.3, on a $\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l \neq 0$. Par clôture préfixe, on factorise $u \cdot \bar{u} \cdot \bar{u}_l$ et $u \cdot \bar{v}_l$, on a donc

$$P = pref\{u \cdot (\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r), u \cdot (\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l)\}.$$

Comme $\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r \neq 0$, on a $\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r = \bar{u} \cdot u_r$ ou $\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r = v_r$.
Si $\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r = \bar{u} \cdot u_r$, alors $u \cdot (\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r) = u \cdot \bar{u} \cdot u_r = u_r \in A^*$.
Si $\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r = v_r$, alors il existe $w \in FG(A)$ tel que $v_r = \bar{u} \cdot u_r \cdot w$, et comme $v_r \in A^*$, on a $w \in A^*$, d'où $u \cdot (\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r) = u \cdot \bar{u} \cdot u_r \cdot w = u_r \cdot w \in A^*$.
On a donc dans tous les cas $u \cdot (\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r) \in A^*$.

Comme $\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l \neq 0$, on a $\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l = \bar{u} \cdot \bar{u}_l$ ou $\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l = \bar{v}_l$.

Si $\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l = \bar{u} \cdot \bar{u}_l$, alors $u \cdot (\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l) = u \cdot \bar{u} \cdot \bar{u}_l = \bar{u}_l$, or $u_l \in A^*$ donc $\bar{u}_l \in \bar{A}^*$.

Si $\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l = \bar{v}_l$, alors il existe $w \in FG(A)$ tel que $\bar{v}_l = \bar{u} \cdot \bar{u}_l w$, et comme $v_l \in A^*$, $\bar{v}_l \in \bar{A}^*$, donc $w \in \bar{A}^*$, d'où $u \cdot (\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l) = u \cdot \bar{u} \cdot \bar{u}_l w = \bar{u}_l w \in \bar{A}^*$.

On a donc dans tous les cas $u \cdot (\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l) \in \bar{A}^*$.

Le domaine P de $t_1 \cdot t_2$ est donc $\mathit{pref}\{u \cdot (\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r), u \cdot (\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l)\}$, avec $u \cdot (\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r) \in A^*$ et $u \cdot (\bar{u} \cdot \bar{u}_l \vee_p \bar{v}_l) \in \bar{A}^*$. Par la définition 3.2.1, le produit $t_1 \cdot t_2$ est donc bien un bien un bi-arbre linéaire.

($\Rightarrow$) Réciproquement, supposons que le produit $(P, u \cdot v) = t_1 \cdot t_2$ soit linéaire. Alors il existe $w_r, w_l \in A^*$ tels que

$$P = \mathit{pref}\{w_r, \bar{w}_l\}, \tag{3.3}$$

c'est à dire que $P \cap A^* = \mathit{pref}(w_r)$ et $P \cap \bar{A}^* = \mathit{pref}(\bar{w}_l)$, et que pour tout $w \in P$, on a $w \in A^*$ ou $w \in \bar{A}^*$.

On remarquera par ailleurs que pour tous $w_1, w_2 \in A^*$, on a $w_1 \cdot w_2 = w_1 w_2$ et $\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 = \bar{w}_1 \bar{w}_2$. Cette propriété sera utile à plusieurs reprises dans cette partie de la démonstration.

(Cas positif) Si t_1 est positive, on a $u \in A^*$. On prouve que $\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_r \neq 0$:

D'après (3.3), comme $u \in P$, on a $u \leq_p u_r$. Il existe donc $u_0 \in A^*$ tel que $u_r = uu_0$. Comme $u, u_0 \in A^*$, on a $u \cdot u_0 = uu_0$. On a donc $u_r = u \cdot u_0$ et $u_0 = \bar{u} \cdot u_r$. De plus, $u, v_r \in A^*$ donc $u \cdot v_r = uv_r$. On a donc, d'après (3.1),

$$P = \mathit{pref}\{uu_0, uv_r, \bar{u}_l, u \cdot \bar{v}_l\}.$$

D'après (3.3), comme $uu_0, uv_r \in A^*$, on a donc $uu_0 \leq_p uv_R$ ou $uv_r \leq_p uu_0$, et donc $u_0 \leq_p v_R$ ou $v_r \leq_p u_0$. Par conséquent $u_0 \vee_p v_R \neq 0$, i.e. $\bar{u} \cdot u_r \vee_p v_R \neq 0$.

On prouve maintenant que $u_l \cdot u \vee_s v_l \neq 0$: D'après (3.1) et (3.3), on a $u \cdot \bar{v}_l \in A^*$ ou $u \cdot \bar{v}_l \in \bar{A}^*$.

Si $u \cdot \bar{v}_l \in A^*$, il existe $v_0 \in A^*$ tel que $u = v_0 v_l$. On a donc $v_l \leq_s u$, donc $v_l \leq_s u_l u$. Or $u_l, u \in A^*$, donc $u_l \cdot u = u_l u$. Par conséquent $v_l \leq_s u_l \cdot u$, donc $u_l \cdot u \vee_s v_l \neq 0$.

Si $u \cdot \bar{v}_l \in \bar{A}^*$, il existe $v_0 \in A^*$ tel que $\bar{v}_l = \bar{u}\bar{v}_0$ donc $\bar{v}_0 = u \cdot \bar{v}_l$. On a donc $\bar{u} \leq_p \bar{v}_l$, donc d'après la propriété 2.1.2 $u \leq_p v_l$.

Comme $u \cdot \bar{v}_l, \bar{u}_l \in \bar{A}^*$, d'après (3.3), on a $u \cdot \bar{v}_l \vee_p \bar{u}_l \neq 0$.

Si $u \cdot \bar{v}_l \leq_p \bar{u}_l$, alors il existe $w_0 \in A^*$ tel que $(u \cdot \bar{v}_l)\bar{w}_0 = \bar{u}_l$. Comme $u \cdot \bar{v}_l \in \bar{A}^*$ et $\bar{w}_0 \in \bar{A}^*$, on a $(u \cdot \bar{v}_l)\bar{w}_0 = u \cdot \bar{v}_l \cdot \bar{w}_0$, donc $u \cdot \bar{v}_l \cdot \bar{w}_0 = \bar{u}_l$. On a donc

$$\bar{u} \cdot u \cdot \bar{v}_l \cdot \bar{w}_0 = \bar{u} \cdot \bar{u}_l,$$

et comme $\bar{u} \cdot u = 1$,

$$\bar{v}_l \cdot \bar{w}_0 = \bar{u} \cdot \bar{u}_l,$$

donc comme $v_l, w_0 \in A^*$,

$$\bar{v}_l \bar{w}_0 = \bar{u} \cdot \bar{u}_l.$$

On a donc $\bar{v}_l \leq_p \bar{u} \cdot \bar{u}_l$. Donc d'après la propriété 2.1.2, on a $v_l \leq_s u_l \cdot u$, donc $u_l \cdot u \vee_s v_l \neq 0$.

Si $\bar{u}_l \leq_p u \cdot \bar{v}_l$, alors il existe $w_0 \in A^*$ tel que $\bar{u}_l \bar{w}_0 = u \cdot \bar{v}_l$. Donc comme $\bar{u}, \bar{w}_0 \in A^*$, on a $\bar{u}_l \cdot \bar{w}_0 = u \cdot \bar{v}_l$, d'où

$$\bar{u} \cdot \bar{u}_l \cdot \bar{w}_0 = \bar{u} \cdot u \cdot \bar{v}_l,$$

et comme $\bar{u} \cdot u = 1$,

$$(\bar{u} \cdot \bar{u}_l) \cdot \bar{w}_0 = \bar{v}_l,$$

donc comme $u, u_l, w_0 \in A^*$,

$$(\bar{u} \cdot \bar{u}_l) \bar{w}_0 = \bar{v}_l.$$

on a donc $\bar{u} \cdot \bar{u}_l \leq_p \bar{v}_l$. Donc d'après le propriété 2.1.2, on a $u_l \cdot u \leq_s v_l$, donc $u_l \cdot u \vee_s v_l \neq 0$.

(Cas négatif) Si t_1 est négative, et donc $u \in \bar{A}^*$, la démonstration est exactement symétrique, comme illustré par la figure 3.12.

□

Propriété 3.3.4. *Pour toutes tuiles $t_1, t_2 \in \mathcal{T}(A)$, le produit $t_1 \cdot t_2$ est non-nul si et seulement si le produit $f(t_1) \cdot f(t_2)$ est non-nul.*

Démonstration. Soient deux tuiles linéaires $t_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et $t_2 = (v_1, v_2, v_3)$; on a donc $f(t_1) = (\mathit{pref}\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}, u_2)$ et $f(t_2) = (\mathit{pref}\{\bar{v}_1, v_2 \cdot v_3\}, v_2)$.

D'après la propriété 3.3.3, si le produit $f(t_1) \cdot f(t_2)$ est non-nul, alors d'une part $u_1 \cdot u_2 \vee_s v_1 \neq 0$, et d'autre part $\bar{u}_2 \cdot u_2 \cdot u_3 \vee_p v_2 \cdot v_3 \neq 0$, donc $u_3 \vee_p v_2 \cdot v_3 \neq 0$.

Par la définition 3.3.2, le produit $t_1 \cdot t_2$ est donc non-nul.

Inversement, si le produit $t_1 \cdot t_2$ est non-nul, par définition, d'une part $u_1 \cdot u_2 \vee_s v_1 \neq 0$, et d'autre part $u_3 \vee_s v_2 \cdot v_3 \neq 0$, donc $\bar{u}_2 \cdot u_2 \cdot u_3 \vee_s v_2 \cdot v_3 \neq 0$.

D'après la propriété 3.3.3, le produit $(\mathit{pref}\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}, u_2) \cdot (\mathit{pref}\{\bar{v}_1, v_2 \cdot v_3\}, v_2) = f(t_1) \cdot f(t_2)$ est donc non-nul. □

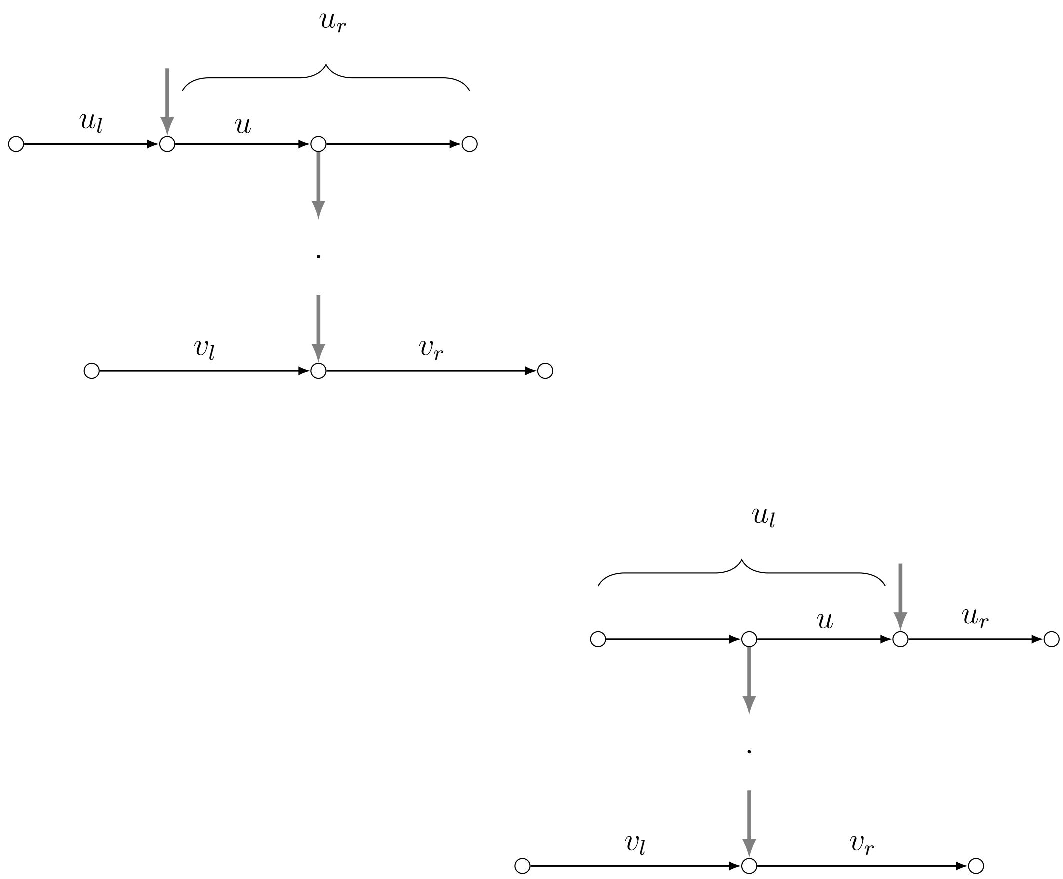
Propriété 3.3.5. *Pour toutes tuiles $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(A)$, $f(t_1 \cdot t_2) = f(t_1) \cdot f(t_2)$.*

Démonstration. Soient deux tuiles $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(A)$.

Si $t_1 = 0$ ou $t_2 = 0$, alors $f(t_1) = 0$ ou $f(t_2) = 0$, et donc $f(t_1 \cdot t_2) = f(t_1) \cdot f(t_2) = 0$.

Si $t_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et $t_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $t_1 \cdot t_2 = 0$, d'après la propriété 3.3.4, on a $f(t_1) \cdot f(t_2) = f(t_1 \cdot t_2) = 0$.

FIGURE 3.12 – Le produit $t_1 \cdot t_2$ lorsque t_1 est positive et lorsque t_1 est négative. (On ne représente que le domaine et l'entrée de t_2, dans la mesure où ce sont les seuls éléments déterminant si le produit est non-nul.)



Si $t_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et $t_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $t_1 \cdot t_2 \neq 0$, d'après la propriété 3.3.4, $f(t_1) \cdot f(t_2) \neq 0$, on a donc

$$\begin{aligned} f(t_1) \cdot f(t_2) &= (pref\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}, u_2) \cdot (pref\{\bar{v}_1, v_2 \cdot v_3\}, v_2) \\ &= (pref\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\} \cup u_2 \cdot pref\{\bar{v}_1, v_2 \cdot v_3\}, u_2 \cdot v_2) \\ &= (pref\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3, u_2 \cdot \bar{v}_1, u_2 \cdot v_2 \cdot v_3\}, u_2 \cdot v_2), \end{aligned}$$

or $v_2 \cdot v_3 \leq_p u_3$ ou $u_3 \leq_p v_2 \cdot v_3$. Par clôture préfixe, on factorise donc $u_2 \cdot u_3$ et $u_2 \cdot v_2 \cdot v_3$. On a donc

$$f(t_1) \cdot f(t_2) = (pref\{\bar{u}_1, u_2 \cdot \bar{v}_1, u_2(u_3 \vee_p v_2 \cdot v_3)\}, u_2 \cdot v_2).$$

Or $\bar{u}_1 = u_2 \cdot \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 = u_2 \cdot \overline{u_1 \cdot u_2}$, donc

$$f(t_1) \cdot f(t_2) = (pref\{u_2 \cdot \overline{u_1 \cdot u_2}, u_2 \cdot \bar{v}_1, u_2 \cdot (u_3 \vee_p v_2 \cdot v_3)\}, u_2 \cdot v_2).$$

FIGURE 3.13 – Le produit des tuiles $(pref\{u_r, \bar{u}_l\}), u) = (pref\{acba, \bar{a}\}, ac)$ et $(pref\{v_r, \bar{v}_l\}, v) = (pref\{bacc, \overline{ac}\}, ba)$ n'est pas nul puisque $ac \leq_s a \cdot ac$, i.e. $v_l \leq_s u_l \cdot u$, et $\overline{ac} \cdot acba \leq_p bacc$, i.e. $\bar{u} \cdot u_r \leq_p v_r$.

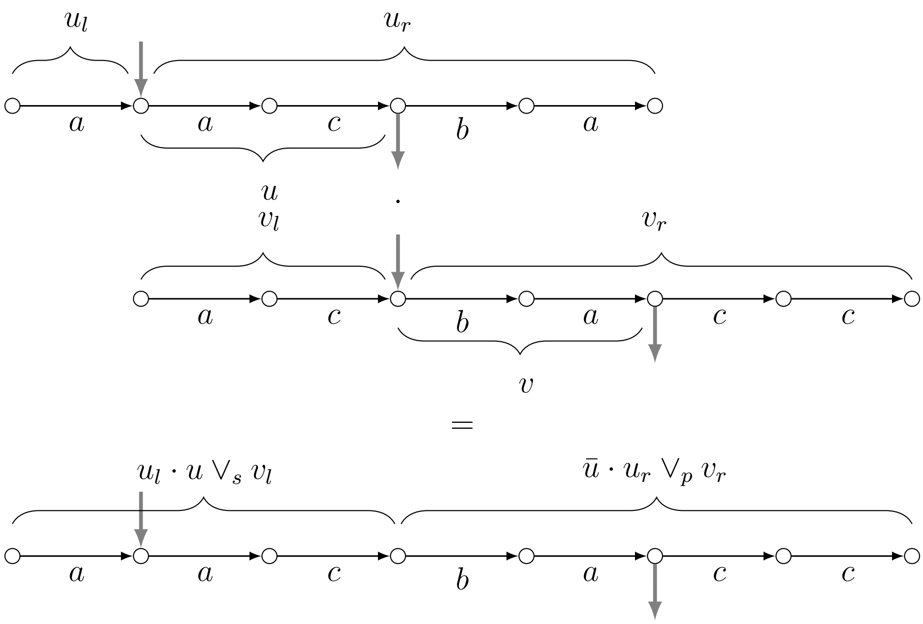
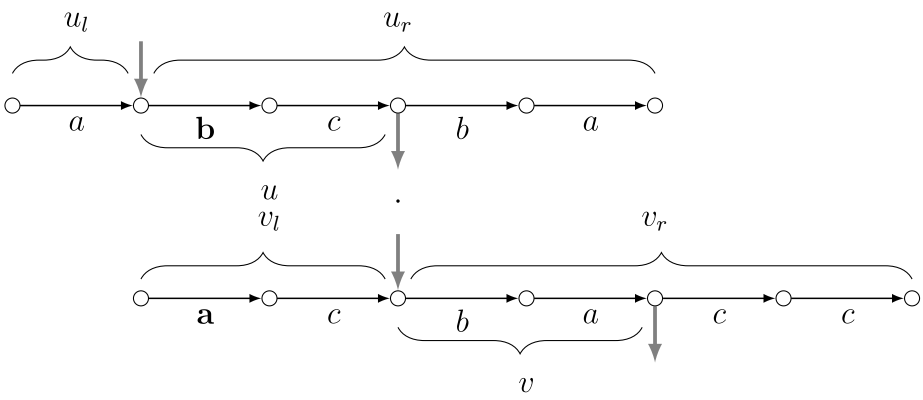


FIGURE 3.14 – Le produit de $(pref\{u_r, \bar{u}_l\}), u) = (pref\{\bar{a}, bcba\}, ac)$ et $(pref\{v_r, \bar{v}_l\}, v) = (pref\{\overline{ac}, bacc\}, ba)$ est en revanche nul car $a \cdot bc \vee_s ac = 0$.



Or $u_1 \cdot u_2 \leq_s v_1$ ou $v_1 \leq_s u_1 \cdot u_2$, donc par la propriété 2.1.2, on a $\overline{u_1 \cdot u_2} \leq_p \bar{v}_1$ ou $\bar{v}_1 \leq_p \overline{u_1 \cdot u_2}$. Par conséquent $u_2 \cdot \overline{u_1 \cdot u_2} \leq_p u_2 \cdot \bar{v}_1$ ou $u_2 \cdot \bar{v}_1 \leq_p u_2 \cdot \overline{u_1 \cdot u_2}$. Par clôture préfixe, on factorise donc $u_2 \cdot \overline{u_1 \cdot u_2}$ et $u_2 \cdot \bar{v}_1$. On a donc

$$f(t_1) \cdot f(t_2) = (pref\{u_2 \cdot (\overline{u_1 \cdot u_2} \vee_p \bar{v}_1), u_2 \cdot (u_3 \vee_p v_2 \cdot v_3)\}, u_2 \cdot v_2).$$

Par le corollaire 2.1.3, on a $\overline{u_1 \cdot u_2} \vee_p \bar{v}_1 = \overline{u_1 \cdot u_2 \vee_s \bar{v}_1}$.

Donc $u_2 \cdot (\overline{u_1 \cdot u_2} \vee_p \bar{v}_1) = u_2 \cdot (\overline{u_1 \cdot u_2 \vee_s \bar{v}_1}) = \overline{(u_1 \cdot u_2 \vee_s \bar{v}_1) \cdot \bar{u}_2}$, et donc

$$f(t_1) \cdot f(t_2) = (pref\{\overline{(u_1 \cdot u_2 \vee_s v_1) \cdot \bar{u}_2}, u_2 \cdot v_2 \cdot \bar{v}_2 \cdot (u_3 \vee_p v_2 \cdot v_3)\}, u_2 \cdot v_2).$$

Par définition de f, on a donc

$$f(t_1) \cdot f(t_2) = f((u_1 \cdot u_2 \vee_s v_1) \cdot \bar{u}_2, u_2 \cdot v_2, \bar{v}_2 \cdot (u_3 \vee_s v_2 \cdot v_3)).$$

Or par la définition 3.3.2 du produit, comme $t_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et $t_2 = (v_1, v_2, v_3)$, on a $t_1 \cdot t_2 = (u_1 \cdot u_2 \vee_s v_1) \cdot \bar{u}_2, u_2 \cdot v_2, \bar{v}_2 \cdot (u_3 \vee_s v_2 \cdot v_3)$. Donc

$$f(t_1) \cdot f(t_2) = f(t_1 \cdot t_2).$$

□

Propriété 3.3.6. *L'application f est une bijection.*

Démonstration. Par la définition 3.2.1 de la linéarité, pour tout $(P, u) \in \mathcal{T}_0(A)$, il existe $v_r, v_l \in A^*$ tels que $P = pref\{\bar{v}_l, v_r\}$, et par définition d'un bi-arbre on a $u \in P$, donc

- ▷ ou bien $u \leq_p v_r$, donc $u \in A^*$ et il existe $w \in A^*$ tel que $uw = v_r$, donc $(P, u) = f(v_l, u, w)$;
- ▷ ou bien $u \leq_p \bar{v}_l$, donc $u \in \bar{A}^*$ et il existe $w \in \bar{A}^*$ tel que $uw = \bar{v}_l$, donc $(P, u) = f(v_l, u, \bar{u}v_r)$.

f est donc surjective.

De plus, soient deux tuiles $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}_0(A)$ telles que $f(u_1, u_2, u_3) = f(v_1, v_2, v_3)$, donc $u_2 = v_2$ et $pref\{\bar{u}_1, u_2u_3\} = pref\{\bar{v}_1, v_2v_3\}$ donc $u_1 = v_1$ et $u_3 = v_3$, on a donc $(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3)$. f est donc injective, c'est donc une bijection. □

On a donc ainsi prouvé le théorème 3.3.1.

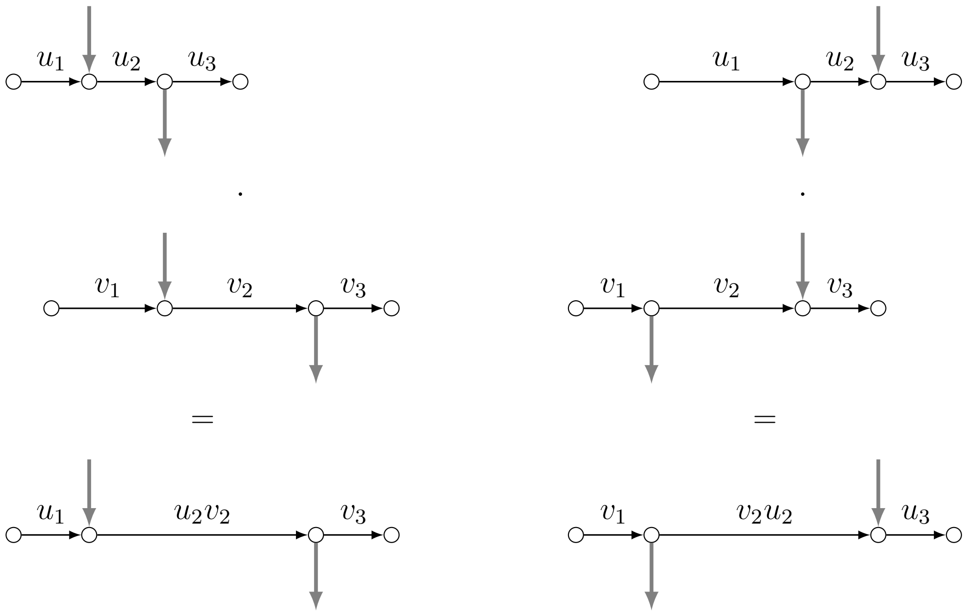
On remarque également que, par définition de f, les notions de tuiles positives et négatives sont stables par f. Les figures 3.15 à 3.17 illustrent le produit de deux tuiles lorsqu'il est non-nul, selon que chacune est positive ou négative.

La figure 3.15 illustre le produit de deux tuiles linéaires toutes deux positives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) : il est toujours positif, et il est non nul si $u_1u_2 \vee_s v_1 \neq 0$ et $u_3 \vee_p v_2v_3 \neq 0$.

La même figure 3.15 illustre le produit de deux tuiles toutes deux négatives $(u_1, u_2, u_3)^{-1}$ et $(v_1, v_2, v_3)^{-1}$: il est toujours négatif, et il est non nul si $u_1 \vee_s v_1v_2 \neq 0$ et $v_3 \leq_p u_2u_3 \neq 0$.

La figure 3.16 illustre le produit d'une tuile positive (u_1, u_2, u_3) et d'une tuile négative $(v_1, v_2, v_3)^{-1}$: il peut être positif (figure de gauche) ou négatif (figure de droite), et il est non nul si les deux conditions suivantes sont remplies

FIGURE 3.15 – Le produit de deux tuiles positives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3), et de deux tuiles négatives $(u_1, u_2, u_3)^{-1}$ et $(v_1, v_2, v_3)^{-1}$.



▷ $u_1u_2 \leq_s v_1v_2$ ou $v_1v_2 \leq_s u_1u_2$,

▷ $u_3 \leq_p v_3$ ou $v_3 \leq_p u_3$.

La figure 3.17 illustre le produit d'une tuile négative $(u_1, u_2, u_3)^{-1}$ et d'une tuile positive (v_1, v_2, v_3) : il peut être positif (figure de gauche) ou négatif (figure de droite), et il est non nul si les deux conditions suivantes sont remplies

▷ $u_1u_2 \leq_s v_1v_2$ ou $v_1v_2 \leq_s u_1u_2$,

▷ $u_3 \leq_p v_3$ ou $v_3 \leq_p u_3$.

$\mathcal{T}(A)$ est donc ordonné par, pour tous $t_1, t_2 \in \mathcal{T}(A)$, $t_1 \leq t_2$ quand $f(t_1) \leq f(t_2)$. Comme f préserve le produit $E(\mathcal{T}(A)) = f(E(FIM_L(A)))$, et donc $\leq$ est bien l'ordre naturel sur $\mathcal{T}(A)$. La propriété suivante exprime cet ordre de manière plus intuitive, comme illustré figure 3.18.

Propriété 3.3.7. *Soient deux tuiles* $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}(A)$*, alors* $(u_1, u_2, u_3) \leq (v_1, v_2, v_3)$ *si et seulement si* $v_1 \leq_s u_1$ *et* $u_2 = v_2$ *et* $v_3 \leq_p u_3$*.*

Démonstration. Commençons par remarquer que, comme f préserve l'ordre, elle préserve les idempotents, et donc l'ordre naturel.

($\Leftarrow$) Soient les tuiles $t_1, t_2 \in \mathcal{T}(A)$ avec $t_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et $t_2 = (v_1, v_2, v_3)$, telles que $v_1 \leq_s u_1$ et $u_2 = v_2$ et $v_3 \leq_p u_3$. Il existe donc $w_1, w_3 \in A^*$ tels que

FIGURE 3.16 – Deux cas de produit non-nul d'une tuile positive (u_1, u_2, u_3) et d'une tuile négative $(v_1, v_2, v_3)^{-1}$: le produit peut être positif ou négatif.

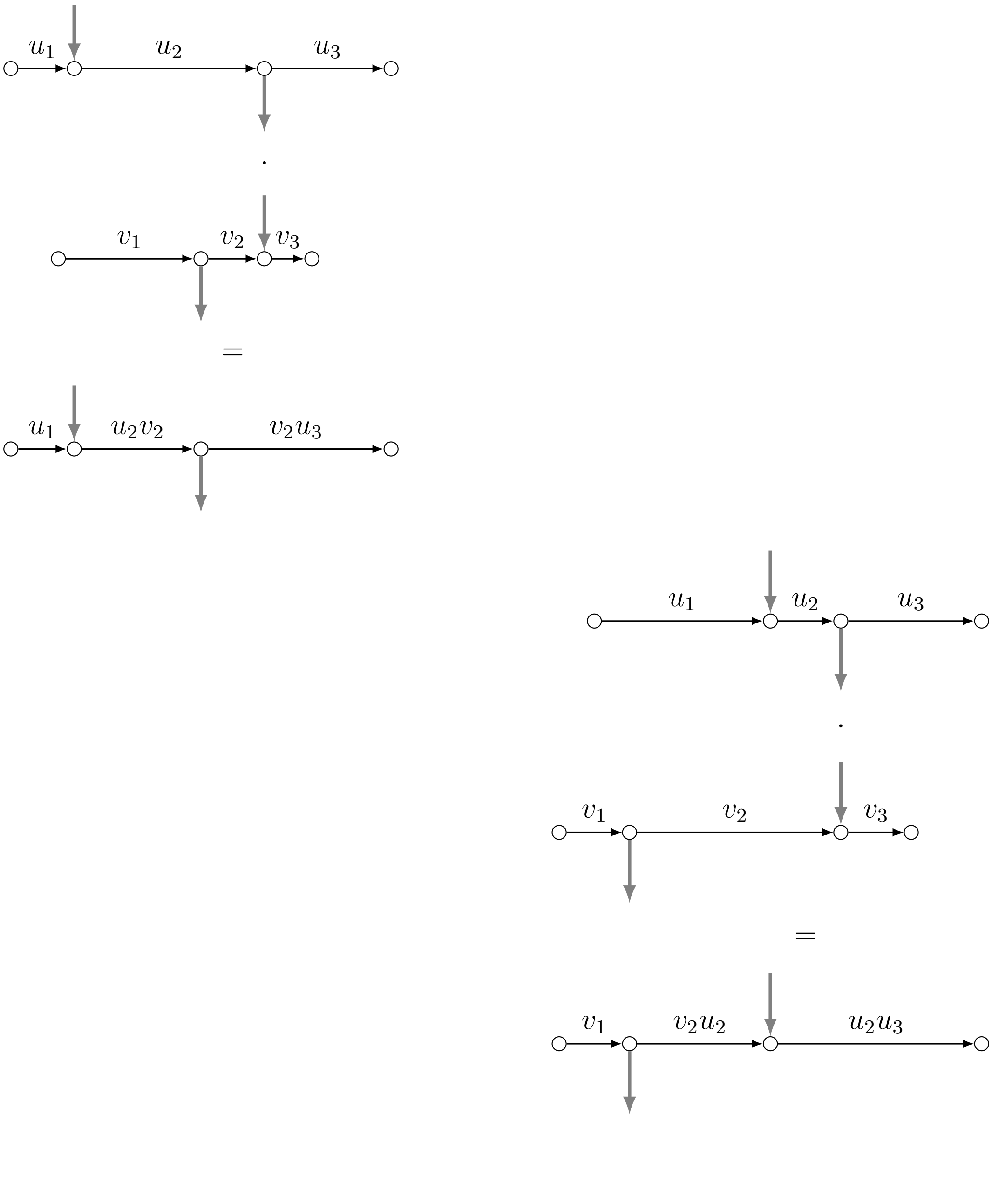
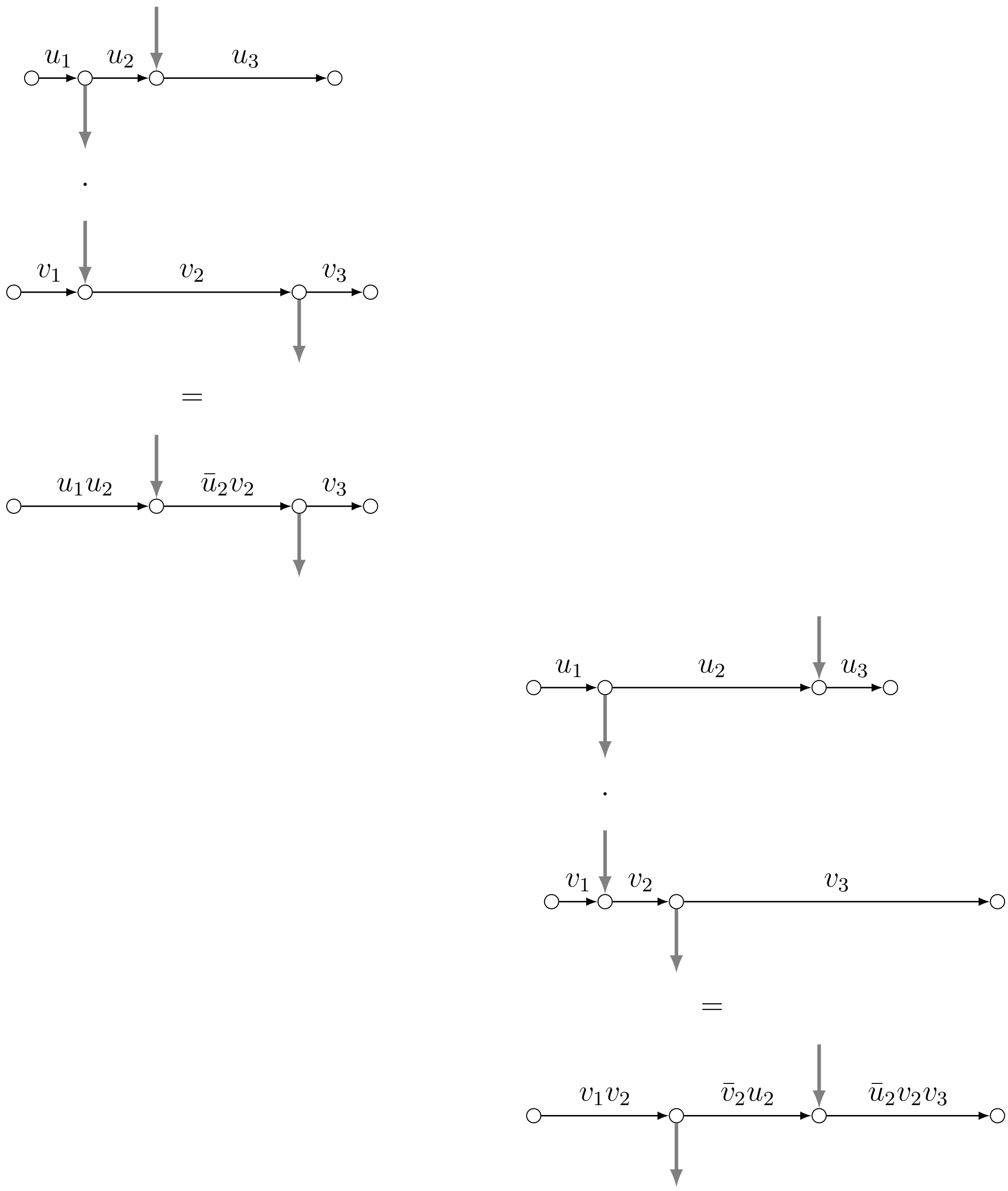


FIGURE 3.17 – Deux cas$MARKED$ de produit non-nul d'une tuile négative $(v_1, v_2, v_3)^{-1}$ et d'une tuile positive (u_1, u_2, u_3) : le produit peut être positif ou négatif.



$u_1 = w_1v_1$ et $u_3 = v_3w_3$. On a donc $t_1 = (w_1v_1, v_2, v_3w_3)$, d'où

$$f(t_1) = (pref\{\overline{w_1v_1}, v_3w_3\}, u_2) = (pref\{\bar{v}_1\bar{w}_1, v_3w_3\}, u_2),$$

or $f(t_2) = (pref\{\bar{v}_1, v_3\}, u_2)$. Donc par la propriété 3.1.3, on a $f(t_1) \leq f(t_2)$ donc $t_1 \leq t_2$.

($\Rightarrow$) Soient les tuiles $t_1, t_2 \in \mathcal{T}(A)$ avec $t_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et $t_2 = (v_1, v_2, v_3)$, telles que $t_1 \leq t_2$ et donc $f(t_1) \leq f(t_2)$, alors

$$(pref\{\bar{v}_1, v_2v_3\}, v_2) \leq (pref\{\bar{u}_1, u_2u_3\}, u_2),$$

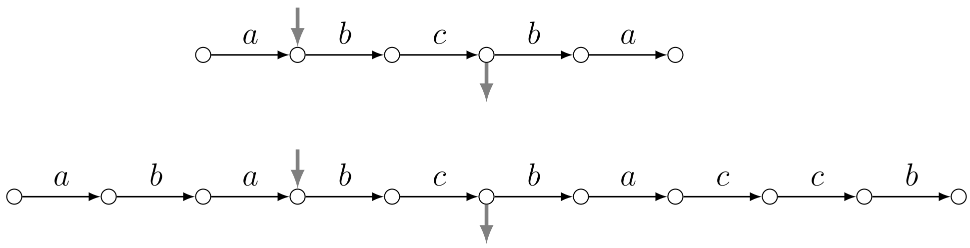
donc par la propriété 3.1.3, on a $v_2 = u_2$ et

$$pref\{\bar{v}_1, v_2v_3\} \subseteq pref\{\bar{u}_1, v_2u_3\}.$$

Donc d'une part $\bar{v}_1 \in pref(\bar{u}_1)$, i.e. $\bar{v}_1 \leq_p \bar{u}_1$, donc $v_1 \leq_s u_1$. Et d'autre part $v_2v_3 \in pref(v_2u_3)$, i.e. $v_2v_3 \leq_p v_2u_3$, donc $v_3 \leq_p u_3$.

□

FIGURE 3.18 – La tuile $(aba, bc, baccb)$ est inférieure à la tuile (a, bc, ba) car $(aba, bc, baccb) = (aba, 1, bcbaccb) \cdot (a, bc, ba)$. On remarque que $a \leq_s aba$ et $bc = bc$ et $ba \leq_p baccb$.

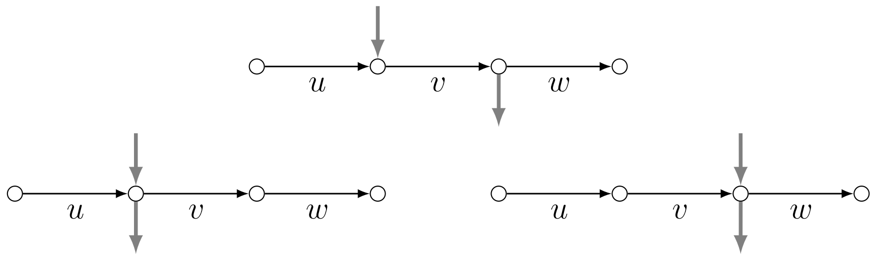


Propriété 3.3.8. *$\mathcal{T}_0(A)$ a pour plus petit élément 0, et pour éléments maximaux les mots, c'est à dire pour tout $u \in A^*$ les tuiles $(1, u, 1)$ et $(1, u, 1)^{-1} = (u, \bar{u}, u)$.*

Démonstration. Pour tout élément $x \in \mathcal{T}_0(A)$, on a $0 = 0 \cdot x$, donc comme 0 est idempotent, par définition de l'ordre naturel, $0 \leq x$.

Par ailleurs, le fait que pour tout $u \in A^*$, les tuiles $(1, u, 1)$ et $(1, u, 1)^{-1}$ soient maximales est une conséquence directe du fait que les mots sont les éléments maximaux de $FIM(A)$, comme montré propriété 3.1.4. En effet, l'ordre naturel sur $\mathcal{T}(A)$ est la restriction de celui sur $FIM(A)$. □

FIGURE 3.19 – La tuile (u, v, w), sa projection droite $(u, 1, vw)$, et sa projection gauche $(uv, 1, w)$.



Remarque. Les projections droites et gauches peuvent toujours être déterminées de la même manière, mais sont exprimables plus simplement lorsque les tuiles sont notées sous forme de triplets de mots, comme illustré figure 3.19.

Soit une tuile linéaire $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{T}_0(A)$, alors $(u_1, u_2, u_3)^R = (u_1, 1, u_2u_3)$ et $(u_1, u_2, u_3)^L = (u_1u_2, 1, u_3)$.

D'après le théorème 1.5.2, l'ensemble des langages stricts de tuiles est un monoïde ayant pour élément neutre $\{1\}$. De même, d'après les propriétés 4.1.1 et 4.1.2, l'ensemble des langages clos par le bas et l'ensemble des langages stricts clos par le bas sont des monoïdes ayant pour élément neutre $\{1\}$.

Enfin, on s'intéressera aux notions de produit restreint et disjoint. On a déjà vu que dans le cas plus générique des bi-arbres que le produit restreint de deux tuiles était défini si leurs domaines se recouvrent parfaitement, la sortie du premier coïncidant avec l'entrée du second, comme illustré figure 3.6. On a également vu que les domaines des deux tuiles ne devaient se chevaucher qu'en exactement un point ; cette notion va être explorée dans la propriété suivante :

Propriété 3.3.9. *Soient deux tuiles non-nulles* $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}(A)$ *dont le produit est non-nul, leur produit disjoint est défini si et seulement si :*

- ▷ $u_1 \cdot u_2 = 1$ *ou* $v_1 = 1$ *d'une part,*
- ▷ $u_3 = 1$ *ou* $v_2 \cdot v_3 = 1$ *d'autre part.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Soient les tuiles $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}(A)$ telles que $(u_1, u_2, u_3) \star (v_1, v_2, v_3)$ est défini. Par définition $(u_1, u_2, u_3)^L \vee (v_1, v_2, v_3)^R = 1$, c'est-à-dire

$$(u_1 \cdot u_2, 1, u_3)^L \vee (v_1, 1, v_2 \cdot v_3)^R = 1.$$

Donc d'après la propriété 3.3.7,

$$v_1 \wedge_s u_1 \cdot u_2 = 1 \text{ et } u_3 \wedge_p v_2 \cdot v_3 = 1.$$

et comme $(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \neq 0$, on a

$$u_1 \cdot u_2 \vee_s v_1 \neq 0 \text{ et } u_3 \vee_p v_2 \cdot v_3 \neq 0.$$

D'une part, comme $u_1 \cdot u_2 \vee_s v_1 \neq 0$, on a $u_1 \cdot u_2 \leq_s v_1$ ou $v_1 \leq_s u_1 \cdot u_2$. Le plus grand suffixe commun de $u_1 \cdot u_2$ et v_1 vérifie donc

$$v_1 \vee_s u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_2 \text{ ou } v_1 \vee_s u_1 \cdot u_2 = v_1,$$

donc comme $v_1 \vee_s u_1 \cdot u_2 = 1$, on a

$$u_1 \cdot u_2 = 1 \text{ ou } v_1 = 1.$$

D'autre part, comme $u_3 \vee_p v_2 \cdot v_3 \neq 0$, on a $u_3 \leq_p v_2 \cdot v_3$ ou $v_2 \cdot v_3 \leq_p u_3$. Le plus grand préfixe commun de u_3 et $v_2 \cdot v_3$ vérifie donc

$$u_3 \wedge_p v_2 \cdot v_3 = u_3 \text{ ou } u_3 \wedge_p v_2 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3,$$

donc comme $u_3 \wedge_p v_2 \cdot v_3 = 1$, on a

$$u_3 = 1 \text{ ou } v_2 \cdot v_3 = 1.$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, soient deux tuiles linéaires non-nulles $t_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et $t_2 = (v_1, v_2, v_3)$ dont le produit est non-nul, vérifiant $u_1 = u_2 = 1$ ou $v_1 = 1$ d'une part, et $u_3 = 1$ ou $v_2 = v_3 = 1$ d'autre part.

Tout d'abord, remarquons que si $u_3 = 1$, la tuile t_1 est positive. En effet, si $u_3 = 1$ et si t_1 est négative, il existe $w_1, w_2, w_3 \in A^*$ tels que $t_1 = (w_1 w_2, \bar{w}_2, w_2 w_3)$. Comme $u_3 = w_2 w_3 = 1$, on a $w_2 = w_3 = 1$ donc $t_1 = (w_1, 1, 1)$.

De même, si $v_1 = 1$, alors t_2 est positive. En effet, s'il existe $w_1, w_2, w_3 \in A^*$ tels que $t_2 = (w_1 w_2, \bar{w}_2, w_2 w_3)$, on a $v_1 = w_1 w_2 = 1$ donc $w_1 = w_2 = 1$. On a donc $t_2 = (1, 1, w_3)$.

Dans les cas (1) et (3) ci-dessous, on pourra donc admettre que t_1 est positive, et par conséquent que $u_1, u_2, u_3 \in A$. Et dans les cas (2) et (3), on pourra donc admettre que t_2 est positive, et par conséquent que $v_1, v_2, v_3 \in A$.

On étudie donc les quatre cas possibles.

(1) Si $u_1 \cdot u_2 = 1$ et $u_3 = 1$, on a donc $t_1 = 1$. Comme t_2^R est une sous-unité, on a $t_1^L \vee t_2^R = 1 \vee t_2^R = 1$, donc $t_1 \star t_2$ est défini.

(2) De même, si $v_1 = 1$ et $v_2 \cdot v_3 = 1$, on a donc $t_2 = 1$. Comme t_1^L est une sous-unité, on a $t_1^L \vee t_2^R = t_1^L \vee 1 = 1$, donc $t_1 \star t_2$ est défini.

(3) Si $v_1 = 1$ et $u_3 = 1$, on a donc $t_1^L = (u_1 \cdot u_2, 1, 1)$ et $t_2^R = (1, 1, v_2 \cdot v_3)$. D'après la propriété 3.3.7, la seule tuile supérieure à t_1^L et à t_2^R est donc $(1, 1, 1)$. Par conséquent $t_1^L \vee t_2^R = 1$, donc $t_1 \star t_2$ est défini.

(4) Si $u_1 \cdot u_2 = 1$ et $v_2 \cdot v_3 = 1$, on a donc $t_1^L = (u_1 \cdot u_2, 1, u_3) = (1, 1, u_3)$ et $t_2^R = (v_1, 1, v_2 \cdot v_3) = (v_1, 1, 1)$. D'après la propriété 3.3.7, la seule tuile supérieure à t_1^L et à t_2^R est donc $(1, 1, 1)$. Par conséquent $t_1^L \vee t_2^R = 1$, donc $t_1 \star t_2$ est défini. □

3.4 Le monoïde des bi-arbres positifs

Doit-on nécessairement disposer des inverses ? La littérature propose une alternative[Fountain, 1977] : les monoïdes amples, qui sont dotés de la même notion de projections droite et gauche que les monoïdes inversifs, mais pas de la notion d'inverse ; on peut alors définir les projections gauche et droite de x comme les plus petits idempotents vérifiant que $x \cdot x^L = x$ et $x^R \cdot x = x$, comme dans la propriété 2.3.1. Le monoïde ample libre correspond alors au sous-monoïde du monoïde inversif libre restreint aux bi-arbres dits positifs [Fountain *et al.*, 2009].

Définition 3.4.1. Un *monoïde ample* est un sous-monoïde d'un monoïde inversif clos par projections droite et gauche.

Définition 3.4.2. Soient deux monoïdes amples M_1 et M_2, un *morphisme de monoïdes amples* de M_1 dans M_2 est un morphisme de monoïdes φ tel que :

$$\text{pour tout } x \in M_1,\ \varphi(x^L) = \varphi(x)^L \text{ et } \varphi(x^R) = \varphi(x)^R.$$

Exemples.

Soit le monoïde $M'_x = \{0, 1, x\}$, muni du produit défini par 0 est un zéro, 1 est un élément neutre, et $x \cdot x = 0$. On remarque que M'_x n'est pas un monoïde inversif, car x ne possède pas d'inverse, mais M'_x est un sous-monoïde de $M_x = \{0, 1, x, \bar{x}\}$, donné exemple de la définition 2.2.2, clos par projections : $1^L = 1^R = 1$, $0^L = 0^R = 0$ et $x^L = x^R = 1$.

Le monoïde $M = (S \times S) \cup \{1, 0\}$, donné en exemple de la définition 2.2.2 et dans la section 2.3, a pour sous-monoïde $M' = \{(x, y), (x, x), (y, y), 0, 1\}$, qui est clos par projections droites et gauches, tout en n'étant pas un monoïde inversif.

Un monoïde ample ne nécessitant aucune notion d'inverse, on construit le monoïde ample libre en conservant uniquement les tuiles positives, dont les sous-unités. Cela conserve donc les notions de projections droite et gauche au sens de la propriété 2.3.1, qui présente x^R et y^L comme les plus petits idempotents tels que $x^R \cdot x = x$ et $x \cdot x^L = x$.

Propriété 3.4.1. *L'ensemble des bi-arbres positifs $FIM^+(A)$ est un sous-monoïde de $FIM(A)$.*

Démonstration. Soient $(P_1, u_1), (P_2, u_2) \in FIM^+(A)$, par définition d'une tuile positive $u_1 \in A^*$ et $u_2 \in A^*$ donc $u_1 \cdot u_2 \in A^*$. Or $(P_1, u_1) \cdot (P_2, u_2) = (P_1 \cup u_1 \cdot P_2, u_1 \cdot u_2)$, donc $(P_1, u_1) \cdot (P_2, u_2) \in FIM^+(A)$.

De plus, l'unité du produit dans $FIM(A)$ est $1 = (\{1\}, 1) \in FIM^+(A)$. □

Théorème 3.4.2 (Fountain *et al.* [2009])**.** *L'ensemble des tuiles positives $FIM^+(A)$ muni du produit est un monoïde ample.*

Démonstration. Le monoïde des tuiles positives $FIM^+(A)$ est un sous-monoïde de $FIM(A)$. Pour toute tuile t, ses projections t^L et t^R sont des sous-unités, donc des tuiles positives : $FIM^+(A)$ est donc clos par projections. $\square$

C'est le *monoïde ample libre* sur A (c.f. Fountain *et al.* [2009]), car $FIM^+(A)$ est le plus petit monoïde contenant A tel que, pour tout monoïde ample M et toute application f de A dans M, i étant l'injection canonique de A dans A^*, il existe un morphisme φ de A^* dans M tel que $f = \varphi \circ i$, c'est à dire tel que le diagramme de la figure 3.20 commute.

FIGURE 3.20 – Pour un alphabet A, i représentant l'injection canonique, f une application, le monoïde $FIM^+(A)$ assure que le morphisme φ existe.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "i"] & \\ M & FIM^+(A) \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Le produit sur $FIM^+(A)$ étant la restriction de celui sur $FIM(A)$, avec le même élément neutre 1, et toutes les sous-unités étant positives, on remarquera que l'ensemble des sous-unités de $FIM^+(A)$ est celui des sous-unités de $FIM(A)$, et possède donc les mêmes propriétés : c'est un $\wedge$-semitreillis avec le produit comme $\wedge$.

Chapitre 4

Langages de tuiles et monoïdes inversifs

On définit dans ce chapitre la notion de quasi-reconnaissabilité, ou reconnaissabilité par prémorphismes sur les E-monoïdes. On présente également les automates de bi-arbres et de tuiles linéaires, dont on voit qu'ils reconnaissent les langages clos par le haut définissables en MSO. On étudie les propriétés de clôture des deux modèles, et on montre en les comparant que les langages quasi-reconnaissables sont les combinaisons booléennes de langages reconnaissables par automates.

4.1 Préliminaires sur les langages de monoïdes inversifs

On considère dès lors tout monoïde inversif M comme un monoïde ordonné par l'ordre naturel. Le théorème 1.5.1 prouve que l'ensemble des langages sur M est lui-même un monoïde.

Remarque. Contrairement à ce que l'on a pu constater sur les monoïdes (c.f. théorème 1.5.1), pour un monoïde inversif quelconque M, $\mathcal{P}(M)$ n'est pas nécessairement un monoïde inversif, de même que l'ensemble $\mathcal{P}^{\downarrow}(M)$ des langages clos par le bas sur M, malgré la propriété 4.1.1 ci-après.

On rappelle que l'on désigne par $U(M)$ l'ensemble des sous-unités, qui est également l'ensemble des idempotents comme démontré propriété 2.2.7.

Propriété 4.1.1. *Soit un monoïde inversif M, l'ensemble $\mathcal{P}^{\downarrow}(M)$ des langages clos par le bas sur M muni du produit de langages est un monoïde ayant pour élément neutre l'ensemble $1 = U(M)$.*

Démonstration. On considère un monoïde inversif M, et $\mathcal{P}^{\downarrow}(M)$ l'ensemble des langages clos par le bas sur M.

On démontre que $\mathcal{P}^{\downarrow}(M)$ est clos par produit : soient $L_1, L_2 \subseteq M$ deux langages. Soient $x \in L_1^{\downarrow} \cdot L_2^{\downarrow}$ et $y \in M$ tel que $y \leq x$, alors il existe $x_1 \in L_1$ et $x_2 \in L_2$ tels que $x = x_1 \cdot x_2$ et donc $y \leq x_1 \cdot x_2$. Il existe donc $e \in U(M) = E(M)$ tel que $y = e \cdot x_1 \cdot x_2$. Or $e \cdot x_1 \leq x_1$, donc $e \cdot x_1 \in L_1^{\downarrow}$, par conséquent $y = e \cdot x_1 \cdot x_2 \in L_1^{\downarrow} \cdot L_2^{\downarrow}$. Le langage $L_1^{\downarrow} \cdot L_2^{\downarrow}$ est donc clos par le bas, i.e. $L_1^{\downarrow} \cdot L_2^{\downarrow} \in \mathcal{P}^{\downarrow}(M)$.

D'après le théorème 1.5.1, $\mathcal{P}(M)$ est un monoïde. De plus, par définition, l'ensemble $U(M)$ des sous-unités est clos par le bas. Comme $\mathcal{P}^{\downarrow}(M)$ est clos par produit et contient $1_{\mathcal{P}(M)} = U(M)$, c'est donc un sous-monoïde de $\mathcal{P}(M)$. □

On démontre de manière analogue la même propriété sur les langages stricts, c'est-à-dire les langages auxquels on enlève systématiquement 0.

Propriété 4.1.2. *Soit un monoïde inversif M, l'ensemble des langages stricts clos par le bas sur M muni du produit de langages est un monoïde ayant pour élément neutre $U(M)$.*

Remarque. Le fait que $\mathcal{P}^{\downarrow}(M)$ est un monoïde ne se vérifie pas dans le cas plus générique où M est un monoïde ordonné. La preuve de la propriété 4.1.1 est d'ailleurs basée sur la définition de l'ordre naturel, qui énonce que $x \leq y$ quand $x = e \cdot y$ pour un idempotent e.

Exemple. On donne le contre-exemple de $M = \{0, 1, x, y, z_1, z_2\}$, muni du produit définit par, pour tous $u, v \in M$,

$$u \cdot v = \begin{cases} u & \text{si } v = 1 \\ v & \text{si } u = 1 \\ z_2 & \text{si } u = x \text{ et } v = y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et muni de $\leq$ défini comme le plus petit ordre sur M tel que $z_1 \leq z_2$.

On montre que le produit sur M est associatif : soient $u, v, w \in M$. Si $1 \in \{u, v, w\}$, il est clair que $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$; et sinon $(u \cdot v) \cdot w = 0 = u \cdot (v \cdot w)$. De plus, par définition du produit, 1 est un élément neutre.

On montre que l'ordre est stable par produit : soient $u, v, w \in M$ tels que $u \leq v$. Si $u = v$, on a $u \cdot w = v \cdot w$ et $w \cdot u = w \cdot v$. Sinon on a $u = z_1$ et $v = z_2$. Si $w = 1$, on a alors $u \cdot w = w \cdot u = z_1$ et $v \cdot w = w \cdot v = z_2$. Si $w \neq 1$, on a alors $u \cdot w = w \cdot u = v \cdot w = w \cdot v = 0$. Dans tous les cas, on a $u \cdot w \leq v \cdot w$ et $w \cdot u \leq w \cdot v$.

L'ensemble M est donc un monoïde ordonné. On montre que $\mathcal{P}^{\downarrow}(M)$ n'est pas un monoïde, puisqu'il n'est pas clos par produit : par définition de $\leq$, on a $\{x_1\}, \{x_2\} \in \mathcal{P}^{\downarrow}(M)$. Or $\{x\} \cdot \{y\} = \{z_2\}$, et $\{z_2\} \notin \mathcal{P}^{\downarrow}(M)$ puisque $\{z_2\}^{\downarrow} = \{z_1, z_2\}$.

4.2 Monoïdes E-ordonnés et Q-reconnaissabilité

La reconnaissabilité par prémorphisme adéquat (ou Q-reconnaissabilité) constitue le cœur de ce travail. Les prémorphismes sur des semigroupes inversifs ont d'abord été étudiés par McAlister [1976], et leur utilisation comme reconnaisseurs a été introduite par Janin [2013a]. On peaufine ici cette notion via la définition de la classe des monoides E-ordonnés, version ordonnée des monoides d'Ehresmann définit dans Lawson [1991], et la notion de prémorphismes adéquats.

Définition 4.2.1. Un monoïde M ordonné (respectivement préordonné) par une relation $\leq$ est appelé *E-monoïde ordonné* (respectivement *E-monoïde préordonné*) lorsqu'il satisfait les propriétés suivantes :

(A0) M possède un zéro,

(A1) la relation $\leq$ restreinte à l'ensemble $U(M) = \{x \in M \mid x \leq 1\}$ des sous-unités est un ordre, et $U(M)$ ordonné par $\leq$ est un $\wedge$-semitreillis avec $\wedge$ pour produit.

(A2) pour tout $x \in M$, la projection gauche $x^L = min\{y \in U(M) \mid x \cdot y = x\}$ et la projection droite $x^R = min\{y \in U(M) \mid y \cdot x = x\}$ sont définies,

(A3) les projections gauche et droite sont monotones, i.e. pour tous $x, y \in M$, si $x \leq y$ alors $x^L \leq y^L$ et $x^R \leq y^R$,

(A4) les projections gauche et droite induisent des semi-congruences gauche et droite : pour tous $x, y \in M$, $(x \cdot y)^L = (x^L \cdot y)^L$ et $(x \cdot y)^R = (x \cdot y^R)^R$.

Remarque. On remarque que, de par la propriété (A1), toutes les sous-unités sont des idempotents et commutent. En effet, pour tous $e, e_1, e_2 \in U(M)$, on a $e \cdot e = e \wedge e = e$ et $e_1 \cdot e_2 = e_1 \wedge e_2 = e_2 \cdot e_1$.

On note aussi que, dans le cas où M est fini, la propriété (A1) implique la propriété (A2) puisque

$$x^R = \prod \{e \in U(M) \mid e \cdot x = x\},$$
$$x^L = \prod \{e \in U(M) \mid x \cdot e = x\}.$$

Dans tous les cas, pour tout $e \leq 1$ on a $e^R = e = e^L$, donc les application $x \mapsto x^R$ et $x \mapsto x^L$ sont effectivement des projections.

Étonnament, le lien entre la propriété (A3), sur la monotonie, et les propriétés (A0) à (A2) est loin d'être évident. On s'attendrait néanmoins à ce que, au moins dans le cas fini, la propriété (A3) soit une conséquence des précédentes.

La propriété (A4) est équivalente à dire que l'équivalence induite par la projections droite (resp. gauche) est une congruence à gauche (resp. à droite). En effet, pour tous $x, y, z \in M$ tels que $x^R = y^R$, on a $z \cdot x^R = z \cdot y^R$, et par la propriété (A4) on a $(z \cdot x)^R = (z \cdot x^R)^R$ et $(z \cdot y)^R = (z \cdot y^R)^R$ et donc $(z \cdot x)^R = (z \cdot y)^R$. On montre le cas de la projections gauche par un raisonnement symétrique.

Exemples.

Tout monoïde avec zéro, ordonné par $x \leq y$ quand $x = 0$ ou $x = y$ est un E-monoïde ordonné.

Le monoïde $\mathcal{P}(Q \times Q)$ des relations sur un ensemble Q, ordonné par inclusion, est un E-monoïde ordonné, avec le zéro $0 = \emptyset$, l'unité $1 = \{(q,q) \in Q \times Q\}$, et les projections

$$X^L = \{(q,q) \in Q \times Q \mid \exists p \in Q, (p,q) \in X\},$$
$$X^R = \{(p,p) \in Q \times Q \mid \exists q \in Q, (p,q) \in X\}.$$

Propriété 4.2.1. *Tout monoïde inversif M avec zéro muni de l'ordre naturel est un E-monoïde ordonné.*

Démonstration. (A0) est immédiat, on a (A1) par la propriété 2.2.9 et (A2) par la propriété 2.3.1.

On prouve (A3) : pour tous $x, y \in M$, si $x \leq y$ alors il existe $e \in U(M)$ tel que $x = e \cdot y$, donc $x^R \cdot y^R = e \cdot y \cdot y^R = e \cdot y = x^R$. Donc d'après 2.2.9, on a $x^R \wedge y^R = x^R$ donc $x^R \leq y^R$; la preuve que $x^L \leq y^L$ est symétrique.

Enfin, on prouve (A4) : pour tous $x, y \in M$, on a

$$(x \cdot y^R)^R = x \cdot y^R \cdot (x \cdot y^R)^{-1} = x \cdot y^R \cdot y^R \cdot x^{-1} = x \cdot y^R \cdot x^{-1},$$

or $(x \cdot y)^R = x \cdot y \cdot (x \cdot y)^{-1} = x \cdot y \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = x \cdot y^R \cdot x^{-1}$. La preuve de $(x \cdot y)^L = (x^L \cdot y)^L$ est symétrique. □

Définition 4.2.2. Soient deux E-monoïdes ordonnés (resp. préordonnés) M_1 et M_2, un *prémorphisme d'E-monoïdes ordonnés* (resp. *préordonnés*) de M_1 dans M_2 est un prémorphisme de monoïdes ordonnés (resp. préordonnés) tel que, pour tout $x \in M_1$:

$$\varphi(x^R) = \varphi(x)^R,$$
$$\varphi(x^L) = \varphi(x)^L.$$

Lorsque M_1 est un monoïde inversif, le prémorphisme φ est un *prémorphisme adéquat* lorsqu'il préserve le produit disjoint, i.e. pour tous $x, y \in M_1$ tels que $x \star y$ est défini, on a $\varphi(x \star y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, où le produit disjoint $(\star)$ dans un monoïde inversif est définit section 2.3.

Définition 4.2.3 (Langages reconnaissables par prémorphismes adéquats)**.** Soient un monoïde inversif M_1 et un E-monoïde fini M_2, un langage $L \subseteq M_1$ est reconnu par un prémorphisme adéquat $\varphi : M_1 \to M_2$ si il existe un sous-ensemble $S \subseteq M_2$ tel que $L = \varphi^{-1}(S)$.

On nomme *Q-REC*(M_1), ou simplement *Q-REC*, l'ensemble des langages reconnaissables par prémorphismes adéquats, ou langages *quasi-reconnaissables*.

Propriété 4.2.2. *La classe des langages quasi-reconnaissables est close par union, intersection, soustraction et complément.*

Démonstration. On utilisera la construction suivante pour démontrer la clôture par union et intersection : soient le monoïde inversif N, les E-monoïdes (pré)ordonnés finis M_1 et M_2, les prémorphismes adéquats $\varphi_1 : N \to M_1$ et $\varphi_2 : N \to M_2$ et les langages quasi-reconnaissables $L_1 = \varphi_1^{-1}(X_1)$ et $L_2 = \varphi_2^{-1}(X_2)$ avec $X_1 \subseteq M_1$ et $X_2 \subseteq M_2$.

Soit $M = M_1 \times M_2$ (pré)ordonné par le (pré)ordre produit, et muni du produit défini par $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$ pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M$. M est donc un monoïde (pré)ordonné avec $1 = (1, 1)$. On montre que c'est un E-monoïde.

(A0) M possède le zéro $0 = (0, 0)$.

(A1) $E(M) = E(M_1) \times E(M_2)$. Le (pré)ordre sur M restreint à $E(M)$ est donc l'ordre produit sur $E(M_1) \times E(M_2)$. Pour tous $(e_1, e_2), (e'_1, e'_2) \in E(M)$, on a $(e_1, e_2) \wedge (e'_1, e'_2) = (e_1 \wedge e'_1, e_2 \wedge e'_2)$.

(A2) Pour tout $(x_1, x_2) \in M$, on a

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2)^R &= (x_1^R, x_2^R), \\
(x_1, x_2)^L &= (x_1^L, x_2^L).
\end{aligned}$$

(A3) Pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M$ tels que $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$, par préservation de l'ordre on a

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2)^R = (x_1^R, x_2^R) \leq (y_1^R, y_2^R) = (y_1, y_2)^R, \\
(x_1, x_2)^L = (x_1^L, x_2^L) \leq (y_1^L, y_2^L) = (y_1, y_2)^L.
\end{aligned}$$

(A4) Pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M$, on a

$$\begin{aligned}
((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2))^L &= (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)^L \\
&= ((x_1 \cdot y_1)^L, (x_2 \cdot y_2)^L) \\
&= ((x_1^L \cdot y_1)^L, (x_2^L \cdot y_2)^L) \\
&= (x_1^L \cdot y_1, x_2^L \cdot y_2)^L \\
&= ((x_1^L, x_2^L) \cdot (y_1, y_2))^L \\
&= ((x_1, x_2)^L \cdot (y_1, y_2))^L
\end{aligned}$$

On montre de manière identique que $((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2))^R = ((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)^R)^R$.

On montre également que le prémorphisme produit $\varphi : N \to M$ défini par $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ est adéquat. D'une part φ préserve les projections : pour tout $x \in N$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(x^R) &= (\varphi_1(x^R), \varphi_2(x^R)) \\
&= (\varphi_1(x)^R, \varphi_2(x)^R) \\
&= (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^R \\
&= \varphi(x)^R
\end{aligned}$$

On montre de manière identique que $\varphi(x^L) = (\varphi(x_1, x_2))^L = \varphi(x)^L$.

D'autre part φ préserve le produit disjoint : pour tous $x, y \in N$ tels que $\exists x \star y$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(x \star y) &= (\varphi_1(x \star y), \varphi_2(x \star y))\\ &= (\varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y), \varphi_2(x) \cdot \varphi_2(y))\\ &= (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \cdot (\varphi_1(y), \varphi_2(y))\\ &= \varphi(x) \cdot \varphi(y)\end{aligned}$$

Or, $L_1 \cup L_2 = \varphi^{-1}(X_1 \cup X_2)$ et $L_1 \cap L_2 = \varphi^{-1}(X_1 \cap X_2)$, donc $L_1 \cup L_2$ et $L_1 \cap L_2$ sont quasi-reconnaissables.

La clôture par complément est immédiate : soit un langage L reconnu par un prémorphisme adéquat $\varphi : N \to M$, alors $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$ donc son complément vérifie $L^C = \varphi^{-1}(M \setminus \varphi(L))$.

Enfin, la clôture par soustraction est une conséquence directe des précédentes, puisque $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap L_2^C$.

□

Remarque. L'ensemble des langages quasi-reconnaissables n'est pas clos par produit ; on en donnera un contre-exemple avec les langages sur $FIM(A)$ dans la section 4.5.

4.3 Langages de bi-arbres reconnus par NFA

On a défini section 1.6 la notion d'automate fini. On va voir que ces NFA, au sens exact de la définition 1.6.1, sont égalements utilisables dans le cadre de bi-arbres.

Définition 4.3.1 (Automates de bi-arbres)**.** Un *calcul* d'un automate fini $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$ sur un bi-arbre (P, u) est une application $r : P \to Q$ telle que pour tous $v \in P$ et $a \in A$, si $v \cdot a \in P$, alors $(r(v), r(v \cdot a)) \in \delta(a)$. C'est un *calcul acceptant* si $r(1) \in I$ et $r(u) \in F$.

Un bi-arbre t est *accepté* par l'automate $\mathcal{A}$ si il existe un calcul acceptant de $\mathcal{A}$ sur t. L'ensemble $\mathcal{L}_{FIM}(\mathcal{A})$ des bi-arbres acceptés par $\mathcal{A}$ est appelé le *langage (strict) de bi-arbres reconnu* par $\mathcal{A}$.

La remarque ci-dessous donne également des exemples de calculs d'un NFA sur des bi-arbres.

Remarque. Comme mentionné section 1.6, certains états superflus lors de la reconnaissance de mots ne le sont pas lors de la reconnaissance de bi-arbres. En effet, les états initiaux et finaux ne devant correspondre qu'à la lecture de l'entrée et de la sortie, il n'est pas nécessaire que chaque état possède un chemin orienté depuis un état initial, et un chemin orienté vers un état final, pour qu'il soit utile.

Reprenons l'exemple de l'automate $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$ sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ avec $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, δ définie par

- ▷ $\delta(a) = \{(q_0, q_1), (q_2, q_2), (q_2, q_3)\}$,
- ▷ $\delta(b) = \{(q_1, q_2), (q_2, q_4)\}$,
- ▷ $\delta(c) = \{(q_3, q_5), (q_5, q_5)\}$,

$I = \{q_1, q_2\}$, et $F = \{q_3, q_4\}$; cet automate est représenté figure 4.1. On a vu dans la remarque page 12 que supprimer les états q_0 et q_5 n'altérait pas le langage de mots reconnu par $\mathcal{A}$, on va en revanche remarquer que ces états ne sont pas superflus dans la reconnaissance de bi-arbres. On considère les bi-arbres $t_1 = (\{\bar{a}, 1, b, ba, bb\}, ba)$ et $t_2 = (\{\bar{a}, \bar{a}\bar{a}, \bar{b}, 1, a, ac\}, a)$, représentés figure 4.2. On remarque que t_1 est accepté, puisqu'il existe le calcul acceptant r_1 défini par :

- ▷ $r_1(\bar{a}) = q_0$,
- ▷ $r_1(1) = q_1$,
- ▷ $r_1(b) = q_2$,
- ▷ $r_1(ba) = q_3$,
- ▷ $r_1(bb) = q_4$.

En revanche, si l'on élague l'automate en supprimant l'état q_0, il devient impossible de reconnaître t_1 : cela est facilement vérifiable, puisqu'on ne peut alors plus construire de calcul sur le chemin orienté aba, reliant le sommet $\bar{a}$ au sommet ba.

De même,il existe sur t_2 le calcul acceptant r_2 défini par :

- ▷ $r_1(\bar{a}) = q_2$,
- ▷ $r_1(\bar{a}\bar{a}) = q_2$,
- ▷ $r_1(\bar{b}) = q_1$,
- ▷ $r_1(1) = q_2$,
- ▷ $r_1(a) = q_3$,
- ▷ $r_1(ac) = q_5$.

Á nouveau, on remarque que si l'on élague $\mathcal{A}$ en supprimant l'état q_5, il devient impossible de reconnaître t_2 : en effet, l'automate ne peut alors plus lire la lettre c.

La puissance de ces automates reste néanmoins limitée, comme le montre en particulier la propriété suivante :

Propriété 4.3.1. *Les langages de bi-arbres reconnus par des automates finis sont clos par le haut.*

FIGURE 4.1 – L'automate $\mathcal{A}$.

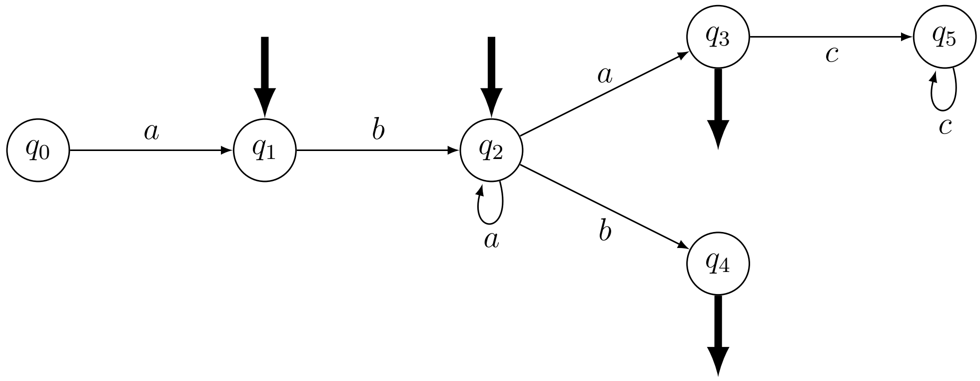
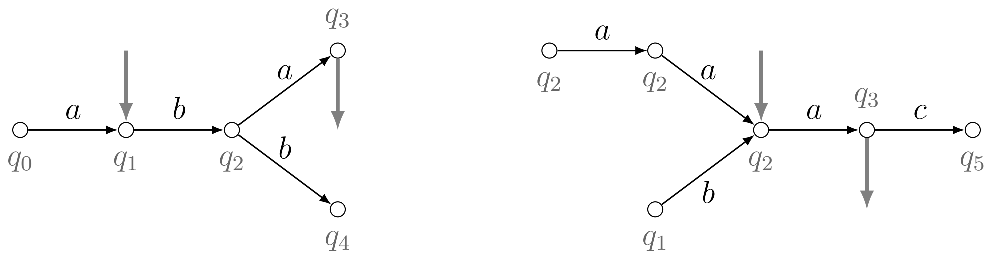


FIGURE 4.2 – Les bi-arbres $(\{1, \bar{a}, b, ba, bb\}, ba)$ et $(\{1, \bar{a}, \bar{a}\bar{a}, \bar{b}, a, ac\}, a)$ sont acceptés par $\mathcal{A}$, mais pas par le *trim automaton* correspondant.



Démonstration. Soit un automate $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F \rangle$ et $(P_1, u) \in FIM(A)$ un bi-arbre accepté par $\mathcal{A}$. Soit $t \in FIM(A)$ tel que $(P_1, u) \leq t$, on a donc $t = (P_2, u)$ avec $P_2 \subseteq P_1$. Comme (P_1, u) est accepté par $\mathcal{A}$, il existe un calcul acceptant r_1 de $\mathcal{A}$ sur (P_1, u), par définition r_1 est un application dont le domaine est P_1. Soit r_2 la restriction de r_1 à P_2, alors r_2 est un calcul acceptant de $\mathcal{A}$ sur $t = (P_2, u)$, donc t est reconnu par $\mathcal{A}$. $\square$

Du point de vue de la logique, il est possible de modéliser les bi-arbres en MSO en représentant chaque lettre comme un prédicat binaire entre éléments du domaine, qui correspond aux sommets, et l'entrée et la sortie comme des prédicats unaires. Il a ainsi été montré par Janin [2013c] que la clôture par le haut est une condition suffisante pour être reconnu par NFA pour tout langage MSO-définissable :

Théorème 4.3.2 ([Janin, 2013c])**.** *Un langage strict est reconnaissable par un automate de tuiles si et seulement s'il est définissable en MSO et clos par le haut.*

On s'intéressera aux propriétés de clôture de cette classe de langages, en commençant par une conséquence du théorème 4.3.1.

Corollaire 4.3.3. *Si un langage non-vide est reconnaissable par automates finis, son complémentaire ne l'est pas.*

Propriété 4.3.4. *La classe des langages de bi-arbres reconnus par NFA est close par $\cup$ et $\cap$.*

Démonstration. Soient les langages de bi-arbres L_1 et L_2 reconnus respectivement par les automates $\mathcal{A}_1 = \langle Q_1, \delta_1, I_1, F_1 \rangle$ et $\mathcal{A}_2 = \langle Q_2, \delta_2, I_2, F_2 \rangle$. On va définir les automates $\mathcal{A}_\cup$ et $\mathcal{A}_\cap$ reconnaissant $L_1 \cup L_2$ et $L_1 \cap L_2$.

En supposant sans perte de généralité que Q_1 et Q_2 sont disjoints, on définit l'automate $\mathcal{A}_\cup = \langle Q_1 \cup Q_2, \delta_\cup, I_1 \cup I_2, F_1 \cup F_2 \rangle$ par, pour tout $a \in A$, on a $\delta_\cup(a) = \delta_1(a) \cup \delta_2(a)$. Pour tout bi-arbre (P, u), il existe donc un calcul acceptant r de $\mathcal{A}_\cap$ sur (P, u) si et seulement si r est un calcul acceptant r de $\mathcal{A}_1$ ou de $\mathcal{A}_2$ sur (P, u).

On définit également l'automate $\mathcal{A}_\cap = \langle Q, \delta_\cap, I_1 \times I_2, F_1 \times F_2 \rangle$ par $Q = Q_1 \times Q_2$ et pour tout $a \in A$

$$\delta_\cap(a) = \{((p_1, p_2), (q_1, q_2)) \in Q \times Q \mid (p_1, q_1) \in \delta_1(a), (p_2, q_2) \in \delta_2(a)\}.$$

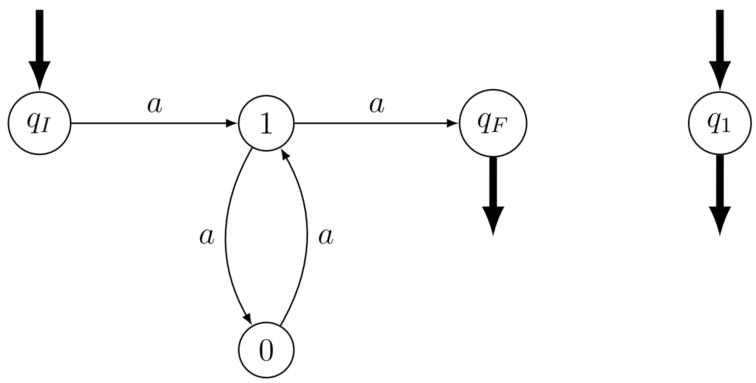
Pour tout bi-arbre (P, u), il existe donc un calcul acceptant r de $\mathcal{A}_\cap$ sur (P, u) si et seulement s'il existe un calcul acceptant r_1 de $\mathcal{A}_1$ sur (P, u) et un calcul acceptant r_2 de $\mathcal{A}_2$ sur (P, u) tel que pour tout $v \in P$, on ait $r(v) = (r_1(v), r_2(v))$. $\square$

Propriété 4.3.5. *La classe des langages de bi-arbres reconnus par NFA n'est pas close par produit.*

Démonstration. On donne le contre exemple suivant : soient les langages de bi-arbres

$$L = \{(\mathit{pref}(a^{2i}), a^{2i}) \in \mathit{FIM}(A) \mid i \in \mathbb{N}\},$$
$$\bar{L} = \{(\mathit{pref}(\bar{a}^{2i}), \bar{a}^{2i}) \in \mathit{FIM}(A) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Ces langages sont reconnaissables par automates, comme en atteste le NFA $\mathcal{A}$ reconnaissant L :



On remarque également qu'il s'agit de langages de bi-arbres linéaires ; on les considérera donc comme des langages de tuiles linéaires. Comme le produit d'une tuile de L et d'une tuile de $\bar{L}$ est toujours linéaire, on remarquera que leur produit $L \cdot \bar{L}$ est le même dans $FIM(A)$ et dans $\mathcal{T}_0(A)$. En reprenant la notation de la section 3.3, on a donc $L = \{(1, a^{2i}, 1) \in \mathcal{T}_0(A) \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $\bar{L} = \{(a^{2i}, \bar{a}^{2i}, a^{2i}) \in \mathcal{T}_0(A) \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Soient les tuiles $(1, a^{2i}, 1) \in L$ et $(a^{2j}, \bar{a}^{2j}, a^{2j}) \in \bar{L}$ avec $i, j \in \mathbb{N}$. Leur produit est donc

$$(1, a^{2i}, 1) \cdot (a^{2j}, \bar{a}^{2j}, a^{2j}) = ((a^{2i} \vee_s a^{2j}) \cdot \bar{a}^{2i}, a^{2i} \cdot \bar{a}^{2j}, a^{2j} \cdot (1 \vee_p \bar{a}^{2j}, a^{2j}).$$

Par conséquent, si $j \leq i$, on a

$$(1, a^{2i}, 1) \cdot (a^{2j}, \bar{a}^{2j}, a^{2j}) = (1, a^{2(i-j)}, a^{2j}),$$

et si $i \leq j$, on a

$$(1, a^{2i}, 1) \cdot (a^{2j}, \bar{a}^{2j}, a^{2j}) = (a^{2(j-i)}, \bar{a}^{2(j-i)}, a^{2j}),$$

donc $L \cdot \bar{L} = \{(1, a^{2m}, a^{2n}), (a^{2m}, \bar{a}^{2m}, a^{2(m+n)}) \in \mathcal{T}_0(A) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Le produit $L \cdot \bar{L}$ n'est donc pas un langage clos par le haut, puisqu'il contient par exemple $(1, aa, aa)$ et pas $(1, aa, a)$, il n'est donc pas reconnaissable par automate. $\square$

4.4 Langages de tuiles linéaires reconnaissables par automate

La reconnaissance de tuiles linéaires est avant tout un cas particulier de reconnaissance de bi-arbres. On peut néanmoins donner une définition équivalente pour la reconnaissance de langages sur $\mathcal{T}(A)$, qui revient à lire les tuiles comme des mots, en associant les états initiaux et finaux à l'entrée et à la sortie, au lieu de la première et la dernière lettre.

Définition 4.4.1 (Automates de tuiles linéaires)**.** Un calcul d'un NFA $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F \rangle$ sur une tuile linéaire (u_1, u_2, u_3) est un calcul de $\mathcal{A}$ sur le mot $u = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$; c'est-à-dire un mot $r \in Q^*$ de longueur $|u| + 1$, tel que pour tout $1 \leq i \leq |u|$, $(r(i), r(i+1)) \in \delta(u(i))$.

C'est un *calcul acceptant* si $r(|u_1| + 1) \in I$ et $r(|u_1 \cdot u_2| + 1) \in F$, i.e. si l'automate est dans un état initial après avoir lu u_1 et dans un état final après avoir lu $u_1 \cdot u_2$.

Une tuile linéaire t est *acceptée* par un automate $\mathcal{A}$ s'il existe un calcul acceptant de $\mathcal{A}$ sur t. L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathcal{T}(A)}(\mathcal{A})$ des tuiles linéaires acceptées par un automate $\mathcal{A}$ est appelé le *langage (strict) de tuiles linéaires reconnu* par $\mathcal{A}$.

Afin de lier reconnaissance par NFA sur $FIM(A)$ et sur $\mathcal{T}(A)$, on remarquera également les lemmes suivants :

Lemme 4.4.1. *Une tuile linéaire t est acceptée par un NFA $\mathcal{A}$ si et seulement si le bi-arbre linéaire $f(t)$ est accepté par $\mathcal{A}$, où f est le morphisme de monoïdes inversifs bijectif entre $\mathcal{T}_0(A)$ et $FIM_L(A)$ du théorème 3.3.1.*

Démonstration. Soit la tuile linéaire $t = (u_1, u_2, u_3)$, ou, de manière équivalente comme démontré section 3.3, le bi-arbre linéaire $f(t) = (pref\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}, u_2)$.

Si il existe un calcul acceptant r du NFA $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$ sur t, alors on peut construire le calcul acceptant r' de $\mathcal{A}$ sur $f(t)$ par

$$r'(v) = \begin{cases} r(|u_1| - |v| + 1) & \text{si } v \in pref(\bar{u}_1) \\ r(|u_1| + |v| + 1) & \text{si } v \in pref(u_2 \cdot u_3) \end{cases}$$

pour tout $v \in pref\{\bar{u}_1, u_2 \cdot u_3\}$.

Si il existe un calcul acceptant r du NFA $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$ sur $f(t)$, alors on peut construire le calcul acceptant r' de $\mathcal{A}$ sur t par

$$r'(i) = \begin{cases} r(\overline{u_1(i; |u_1|)}) & \text{si } 1 \leq i \leq |u_1| + 1 \\ r((u_2 \cdot u_3)(1; i)) & \text{si } |u_1| + 1 \leq i \leq |u_2 \cdot u_3| + 1 \end{cases}$$

pour tout $1 \leq i \leq |u_1| + |u_2 \cdot u_3|$. □

Exemple. Reprenons l'exemple de l'automate $\mathcal{A}$, représenté figure 4.3. Il existe un seul calcul acceptant de $\mathcal{A}$ sur la tuile $t = (a, ba, c)$, le calcul

$$r = q_0q_1q_2q_3q_5,$$

et un seul calcul acceptant de $\mathcal{A}$ sur le bi-arbre $f(t) = (\{1, \bar{a}, b, ba, bac\}, ba)$, le calcul r' défini par

- ▷ $r'(\bar{a}) = q_0$,
- ▷ $r'(1) = q_1$,
- ▷ $r'(b) = q_2$,
- ▷ $r'(ba) = q_3$,
- ▷ $r'(bac) = q_5$.

Lemme 4.4.2. *Le langage de bi-arbres $FIM_L(A)$ est reconnaissable par automate.*

Démonstration. On définit l'automate $\mathcal{A}_L = \{A \times A, \delta, A \times A, A \times A\}$ par, pour tout $a \in A$,

$$\delta(a) = \{((x, a), (a, y)) \in A \times A\}.$$

Cet automate étiquette les sommets d'un bi-arbre par un couple (lettre entrante, lettre sortante), assurant ainsi que ce sommet n'ait qu'un seul arc entrant et un seul arc sortant. On montre que $\mathcal{A}_L$ reconnaît $FIM_L(A)$.

($\Rightarrow$) Soit une tuile linéaire $t = (pref(\bar{u}_l, u_r), u)$, alors il existe une tuile $(u, v, w) \in \mathcal{T}(A)$ tel que $t = f^{-1}(u, v, w)$. Il existe alors au moins un calcul de $\mathcal{A}_L$ sur (u, v, w), le calcul r défini par, pour un $a \in A$ quelconque,

▷ $r(1) = (a, (u \cdot v \cdot w)(1))$,

▷ $r(|u \cdot v \cdot w| + 1) = ((u \cdot v \cdot w)(|u \cdot v \cdot w|), a)$,

▷ pour tout $1 < i \leq |u \cdot v \cdot w|$, $r(i) = ((u \cdot v \cdot w)(i-1), (u \cdot v \cdot w)(i))$.

Or par définition de $\mathcal{A}_L$, tout calcul est acceptant ; donc d'après le lemme 4.4.1, la tuile t est acceptée par $\mathcal{A}_L$.

($\Leftarrow$) Soit un bi-arbre non-linéaire $t = (P, u) \in \bot_A$. Comme on l'a vu section 3.2, t vérifie donc une de ces trois propriétés :

(i) Si il existe $v_1, v_2 \in P \cap A^*$ tels que $v_1 \vee_p v_2 = 0$, alors il existe $w, w_1, w_2 \in A^*$ et $a_1, a_2 \in A$ tels que $v_1 = wa_1w_1$ et $v_2 = wa_2w_2$ avec $a_1 \neq a_2$. Par clôture préfixe de P, on a donc $wa_1 \in P$ et $wa_2 \in P$. On démontre par l'absurde qu'il n'existe pas de calcul de $\mathcal{A}_L$ sur t :

Supposons qu'il existe un calcul r de $\mathcal{A}_L$ sur t avec $r(w) = (x, y)$, $r(wa_1) = (x_1, y_1)$ et $r(wa_2) = (x_2, y_2)$. Par définition d'un calcul, on aurait $((x, y), (x_1, y_1)) \in \delta(a_1)$ et $((x, y), (x_2, y_2)) \in \delta(a_2)$. Donc par définition de δ, on aurait $y = x_1 = a_1$ et $y = x_2 = a_2$, or $a_1 \neq a_2$.

(ii) Si il existe $v_1, v_2 \in P \cap \bar{A}^*$ tels que $v_1 \vee_p v_2 = 0$, alors il existe $w, w_1, w_2 \in \bar{A}^*$ et $a_1, a_2 \in A$ tels que $v_1 = w\bar{a}_1w_1$ et $v_2 = w\bar{a}_2w_2$ avec $a_1 \neq a_2$. Par clôture préfixe de P, on a donc $w\bar{a}_1 \in P$ et $w\bar{a}_2 \in P$. On démontre par l'absurde qu'il n'existe pas de calcul de $\mathcal{A}_L$ sur t :

Supposons qu'il existe un calcul r de $\mathcal{A}_L$ sur t avec $r(w) = (x, y)$, $r(w\bar{a}_1) = (x_1, y_1)$ et $r(w\bar{a}_2) = (x_2, y_2)$. Par définition d'un calcul, on aurait $((x_1, y_1), (x, y)) \in \delta(a_1)$ et $((x_2, y_2), (x, y)) \in \delta(a_2)$. Donc par définition de δ, on aurait $x = y_1 = a_1$ et $x = y_2 = a_2$, or $a_1 \neq a_2$.

(iii) Si il existe $w \in FG(A)$ et $a, b \in A$ tels que $wa\bar{b} \in P$ (resp. $w\bar{a}b \in P$), on a donc $a \neq b$, sans quoi on aurait $wa\bar{b} \notin FG(A)$ (resp. $w\bar{a}b \notin FG(A)$). On démontre par l'absurde qu'il n'existe pas de calcul de $\mathcal{A}_L$ sur t :

Supposons qu'il existe un calcul r de $\mathcal{A}_L$ sur t avec $r(wa) = (x, y)$ (resp. $r(w\bar{a}) = (x, y)$), $r(w) = (x_1, y_1)$ et $r(wa\bar{b}) = (x_2, y_2)$ (resp. $r(w\bar{a}b) = (x_2, y_2)$). On aurait alors $((x_1, y_1), (x, y)) \in \delta(a)$ et $((x_2, y_2), (x, y)) \in \delta(b)$ (resp. $((x, y), (x_1, y_1)) \in \delta(a)$ et $((x, y), (x_2, y_2)) \in \delta(b)$). On aurait donc $x = y_1 = a$ et $x = y_2 = b$ (resp. $y = x_1 = a$ et $y = x_2 = b$), or $a \neq b$. □

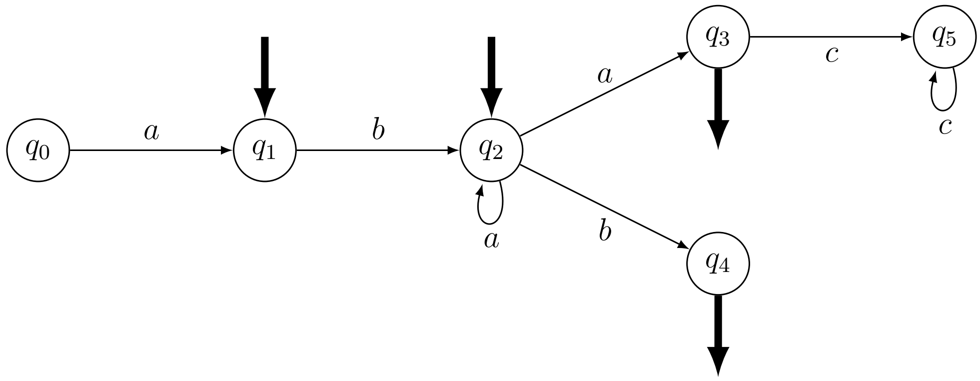
On peut donc établir un lien fort entre les notions de reconnaissabilité par NFA sur $\mathcal{T}(A)$ et $FIM(A)$:

Propriété 4.4.3. *Un langage de tuiles linéaires L est reconnaissable par NFA si et seulement si le langage de bi-arbres $f(L)$ est reconnaissable par NFA.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Soit un langage de tuiles linéaires L tel que le langage de bi-arbres $f(L)$ soit reconnu par un NFA $\mathcal{A}$. D'après le lemme 4.4.1, les tuiles linéaires acceptées par $\mathcal{A}$ sont exactement L, donc L est reconnaissable par NFA.

($\Rightarrow$) Soit un langage de tuiles linéaires L reconnu par un NFA $\mathcal{A}$. D'après le lemme 4.4.1, les bi-arbres linéaires acceptés par $\mathcal{A}$ sont exactement $f(L)$.

FIGURE 4.3 – L'automate $\mathcal{A}$.



Donc $f(L) = \mathcal{L}_{FIM(A)}(\mathcal{A}) \cap FIM_L(A)$. Or $FIM_L(A)$ est reconnaissable par NFA, et l'ensemble des langages de bi-arbres reconnaissables par NFA est clos par intersection, donc $f(L)$ est reconnaissable par NFA. □

Comme les langages de tuiles linéaires reconnus par NFA sont des langages de bi-arbres reconnus par NFA, et que l'union et l'intersection de langages de bi-arbres linéaire sont des langages de bi-arbres linéaires, on a donc :

Corollaire 4.4.4. *Les langages de tuiles linéaires reconnus par NFA sont clos par le haut.*

Corollaire 4.4.5. *L'ensemble des langages de tuiles linéaires reconnus par NFA est clos par union et intersection. Il n'est pas clos par complément.*

Propriété 4.4.6. *L'ensemble des langages de tuiles linéaires reconnus par NFA n'est pas clos par produit.*

Démonstration. On renvoie au contre-exemple de la propriété 4.3.5. Puisque le produit des langages de bi-arbres $L = \{(\mathit{pref}(a^{2i}), a^{2i}) \in \mathit{FIM}(A) \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $\bar{L} = \{(\mathit{pref}(\bar{a}^{2i}), \bar{a}^{2i}) \in \mathit{FIM}(A) \mid i \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable par NFA, le produit $f(L) \cdot f(\bar{L})$ ne l'est pas non plus. □

4.5 Q-Reconnaissabilité et automates

On va s'intéresser à la reconnaissabilité par prémorphismes adéquats et E-monoïdes dans le monoïde inversif libre, et la comparer à la reconnaissabilité par automate ; on verra en particulier comment construire un prémorphisme reconnaissant un langage à partir d'un automate. Notre principal résultat sera l'équivalence entre quasi-reconnaissabilité et combinaisons booléennes d'automates.

On commence par introduire le lemme suivant, qui simplifie la définition des prémorphismes adéquats sur les bi-arbres.

Lemme 4.5.1. *Tout prémorphisme défini sur $FIM(A)$ qui préserve les projections et le produit disjoint préserve également le produit restreint.*

Démonstration. Soient un monoïde inversif M ainsi qu'un prémorphisme $\varphi : FIM(A) \to M$ préservant les projections et le produit disjoint. Soient deux bi-arbres $t_1 = (P_1, u_1)$ et $t_2 = (P_2, u_2)$ tels que leur produit restreint $t_1 \bullet t_2$ soit défini. On remarque que par définition du produit restreint $t_1^L = t_2^R$, donc d'après le lemme 3.1.5, $(\bar{u}_1 \cdot P_1, 1) = (P_2, 1)$, d'où

$$\bar{u}_1 \cdot P_1 = P_2 \tag{4.1}$$

On va tout d'abord décomposer ces deux bi-arbres en deux produits ; on définit $x_1 = (X, u_1)$ et $e_1 = (E, 1)$ par

$$X = \{v \in P_1 \mid u_1 \not\leq_p v\},$$
$$E = \{v \in P_1 \mid u_1 \leq_p v\}.$$

On a donc $x_1 \cdot e_1 = (X \cup u_1 \cdot E, u_1 \cdot 1) = (P_1, u_1)$, on vérifie donc que $x_1 \cdot e_1 = t_1$.

On définit également $e_2 = (\bar{u}_1 \cdot X, 1)$ et $x_2 = (E, u_2)$. On a donc

$$e_2 \cdot x_2 = (\bar{u}_1 \cdot E \cup 1 \cdot \bar{u}_1 \cdot X, 1 \cdot u_2) = (\bar{u}_1 \cdot P_1, u_2),$$

Donc d'après (4.1), on a $e_2 \cdot x_2 = t_2$.

Par conséquent, on a donc

$$t_1 \bullet t_2 = x_1 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot x_2,$$

et par commutativité des idempotents e_1 et e_2,

$$t_1 \bullet t_2 = x_1 \cdot e_2 \cdot e_1 \cdot x_2.$$

Or $x_1 \cdot e_2 = (X \cup u_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot X, u_1 \cdot 1) = (X \cup 1 \cdot X, u_1) = (X, u_1)$, donc $x_1 \cdot e_2 = x_1$. Et de même $e_1 \cdot x_2 = (E \cup 1 \cdot E, 1 \cdot u_2) = (E, u_2)$, donc $e_1 \cdot x_2 = x_2$.

Par conséquent $t_1 \bullet t_2 = x_1 \cdot x_2$. On va montrer que ce produit est disjoint.

Par le lemme 3.1.5 sur les projections dans $FIM(A)$, on a

$$x_1^L = (\bar{u}_1 \cdot X, 1),$$
$$x_2^R = (E, 1).$$

Donc d'après la propriété 3.1.3 sur l'ordre naturel sur $FIM(A)$, le bi-arbre $x_1^L \vee x_2^R$ est le plus petit bi-arbre $(P, 1)$ tel que $P \subseteq \bar{u}_1 \cdot X$ et $P \subseteq E$.

On rappelle que $X = \{v \in P_1 \mid u_1 \not\leq_p v\}$ et $E = \bar{u}_1 \cdot \{v \in P_1 \mid u_1 \leq_p v\}$. Comme $X \cap \{v \in P_1 \mid u_1 \leq_p v\} = \{u_1\}$, on a $\bar{u}_1 \cdot X \cap E = \{\bar{u}_1 \cdot u_1\} = \{1\}$. On a donc $x_1^L \vee x_2^R = (\{1\}, 1) = 1$. Le produit disjoint $x_1 \star x_2$ est donc défini.

Comme $t_1 \bullet t_2 = x_1 \star x_2$, par préservation du produit restreint,

$$\varphi(t_1 \bullet t_2) = \varphi(x_1 \star x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2).$$

Or par définition $X \subseteq P_1$ donc $t_1 \leq x_1$. De même $\{v \in P_1 \mid u_1 \leq_p v\} \subseteq P_1$ donc $E \subseteq \bar{u}_1 \cdot P_1 = P_2$, donc $t_2 \leq x_2$. Par préservation de l'ordre, on a donc $\varphi(t_1) \leq \varphi(x_1)$ et $\varphi(t_2) \leq \varphi(x_2)$, donc

$$\varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \leq \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) = \varphi(t_1 \bullet t_2).$$

Or, φ étant un prémorphisme, on a $\varphi(t_1 \bullet t_2) \leq \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2)$, donc

$$\varphi(t_1 \bullet t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2).$$

$\square$

Afin de comparer les langages de bi-arbres reconnus par automates aux langages de bi-arbres quasi-reconnaissables, on va définir la notions de prémorphisme adéquat associé à un automate.

Définition 4.5.1. Soit un NFA $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F \rangle$, on définit l'application $\varphi_{\mathcal{A}} : FIM(A) \to \mathcal{P}(Q \times Q)$ associée à $\mathcal{A}$ par, pour tout $(P, u) \in FIM(A)$, l'ensemble $\varphi_{\mathcal{A}}(P, u)$ est l'ensemble des paires $(r(1), r(u))$ pour tout calcul r de $\mathcal{A}$ sur (P, u).

Afin de pouvoir montrer que le prémorphisme associé à un automate est adéquat, on va devoir montrer que son ensemble d'arrivée, $\mathcal{P}(Q \times Q)$, est bien un E-monoïde.

Propriété 4.5.2. *Pour tout ensemble Q, l'ensemble $\mathcal{P}(Q \times Q)$, muni du produit défini par, pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(Q \times Q)$,*

$$X \cdot Y = \{(x, y) \in Q \times Q \mid \exists z \in Q, (x, z) \in X, (z, y) \in Y\},$$

et ordonné par inclusion, est un E-monoïde ordonné avec le zéro $\emptyset$, l'unité $1 = \{(q, q) \in Q \times Q\}$, et les projections

$$X^R = \{(x_1, x_1) \in X \mid \exists x_2 \in Q, (x_1, x_2) \in X\},$$
$$X^L = \{(x_2, x_2) \in X \mid \exists x_1 \in Q, (x_1, x_2) \in X\}.$$

Démonstration. Par définition, le produit est associatif. En effet, pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{P}(Q \times Q)$, on a

$$X\cdot(Y\cdot Z) = (X\cdot Y)\cdot Z = \{(x,z) \in Q\times Q \mid \exists (y_1,y_2) \in Y, (x,y_1) \in X, (y_2,z) \in Z\}.$$

Il possède également l'élément neutre $1 = \{(q,q) \in Q\}$. L'ensemble $\mathcal{P}(Q \times Q)$ est donc un monoïde.

(A0) Par définition du produit, $\emptyset$ est un zéro.

(A1) Comme $1 = \{(q,q) \in Q\}$, les sous-unités sont les éléments X vérifiant, pour tout $(x,y) \in X$, $x = y$. Donc pour tous $X, Y \in E(\mathcal{P}(Q \times Q))$, l'élément $X \wedge Y$ existe et on a $X \wedge Y = X \cap Y = X \cdot Y$.

(A2) Pour tout $X \in \mathcal{P}(Q \times Q)$, on a

$$\begin{aligned} X^R &= \{(x_1,x_1) \in X \mid \exists x_2 \in Q, (x_1,x_2) \in X\}, \\ X^L &= \{(x_2,x_2) \in X \mid \exists x_1 \in Q, (x_1,x_2) \in X\}. \end{aligned}$$

En effet, $X^R \cdot X = X$ (resp. $X \cdot X^L = X$), et pour tout $(x_1,x_2) \in X$, tout $Y \in \mathcal{P}(Q \times Q)$ ne contenant pas (x_1,x_1) (resp. pas (x_2,x_2)) vérifie bien $(x_1,x_2) \notin Y \cdot X$ (resp. $(x_1,x_2) \notin X \cdot Y$).

(A3) Par définition des projections ci-dessus, pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(Q \times Q)$, si $X \subseteq Y$, on a $X^R \leq Y^R$ et $X^L \leq Y^L$.

(A4) Par définition des projections, pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(Q \times Q)$, on a

$$\begin{aligned} (X \cdot Y)^L &= \{(y_2,y_2) \in Q \times Q \mid \exists x, y_1 \in Q, (x,y_1) \in X, (y_1,y_2) \in Y\} \\ &= \{(y_2,y_2) \in Q \times Q \mid \exists y_1 \in Q, (y_1,y_1) \in X^L, (y_1,y_2) \in Y\} \\ &= (X^L \cdot Y)^L. \end{aligned}$$

Symétriquement $(X \cdot Y)^R = (X \cdot Y^R)^R$. □

Propriété 4.5.3. *Pour tout NFA $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$, l'application $\varphi_{\mathcal{A}}$ est un prémorphisme adéquat.*

Démonstration. Soit un NFA $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$. On montre tout d'abord que $\varphi_{\mathcal{A}}$ est un prémorphisme de monoïdes ordonnés.

On montre d'abord qu'il est sous-multiplicatif. Soient deux bi-arbres $t_1 = (P_1, u_1)$ et $t_2 = (P_2, u_2)$, on a donc $t_1 \cdot t_2 = (P_1 \cup u_1 \cdot P_2, u_1 \cdot u_2)$. Pour tout calcul r sur $t_1 \cdot t_2$, sa restriction r_1 à P_1 est un calcul sur t_1, et $r_2 : P_2 \to Q$ défini par $r_2(v) = r(u_1 \cdot v)$ est un calcul sur t_2. Par conséquent, pour tout $(r(1), r(u_1 \cdot u_2)) \in \varphi_{\mathcal{A}}(t_1 \cdot t_2)$, on a

$$\begin{gathered} (r(1), r(u_1)) = (r_1(1), r_1(u_1)) \in \varphi_{\mathcal{A}}(t_1) \\ \text{et } (r(u_1), r(u_1 \cdot u_2)) = r_2(1), r_2(u_2) \in \varphi_{\mathcal{A}}(t_2). \end{gathered}$$

On a donc $(r(1), r(u_1 \cdot u_2)) \in \varphi_{\mathcal{A}}(t_1) \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(t_2)$.

Les calcul sur la tuile vide 1 sont les calculs de la forme (q,q), donc $\varphi_{\mathcal{A}}(1) = \{(q,q) \in Q\} = 1$.

Comme vu dans la propriété 4.3.1, pour tous $(P_1,u),(P_2,u) \in FIM(A)$ tels que $(P_1,u) \leq (P_2,u)$, pour tout calcul r sur (P_1,u), sa restriction à P_2 est un calcul sur (P_2,u). Donc pour tout $(r(1),(r(u)) \in \varphi_{\mathcal{A}}(P_1,u)$, on a $(r(1),(r(u)) \in \varphi_{\mathcal{A}}(P_2,u)$, i.e. $\varphi_{\mathcal{A}}(P_1,u) \subseteq \varphi_{\mathcal{A}}(P_2,u)$.

On va maintenant montrer que $\varphi_{\mathcal{A}}$ est un prémorphisme d'E-monoïdes, c'est-à-dire qu'il préserve les projections. Soit $t=(P,u)$, comme t et $t^R=(P,1)$ possèdent le même domaine, les calculs sur t sont exactement les calculs sur t^R. Donc pour tout $(r(1),r(u))\ \varphi_{\mathcal{A}}(t)$, on a $(r(1),r(1))\ \varphi_{\mathcal{A}}(t^R)$, et réciproquement pour tout $(r(1),r(1))\ \varphi_{\mathcal{A}}(t^R)$, on a $(r(1),r(u))\ \varphi_{\mathcal{A}}(t)$. On a donc $\varphi_{\mathcal{A}}(t^R) = (\varphi_{\mathcal{A}}(t))^R$. Symétriquement, $\varphi_{\mathcal{A}}(t^L) = (\varphi_{\mathcal{A}}(t))^L$.

On va enfin montrer qu'il s'agit d'un prémorphisme adéquat, c'est-à-dire qu'il préserve le produit disjoint. Soient Soient deux bi-arbres $t_1=(P_1,u_1)$ et $t_2=(P_2,u_2)$ tels que leur produit disjoint $t_1 \star t_2$ est défini, i.e. $t_1^L \wedge t_2^R = 1$, i.e. $\bar{u}_1 \cdot P_1 \cap P_2 = \{1\}$. On a donc $P_1 \cap u_1 \cdot P_2 = \{1\}$.

Par sous-multiplicativité, on a $\varphi_{\mathcal{A}}(t_1 \cdot t_2) \subseteq \varphi_{\mathcal{A}}(t_1) \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(t_2)$. On va montrer que $\varphi_{\mathcal{A}}(t_1) \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(t_2) \subseteq \varphi_{\mathcal{A}}(t_1 \cdot t_2)$.

Soit $(p,q) \in \varphi_{\mathcal{A}}(t_1) \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(t_2)$, il est donc de la forme $(p,q) = (r_1(1), r_2(u_2))$, avec r_1 un calcul sur t_1 et r_2 un calcul sur t_2 tels que $r_1(u_1) = r_2(1)$. Comme $P_1 \cap u_1 \cdot P_2 = \{1\}$, on peut définir $r : P_1 \cup u_1 \cdot P_2 \to Q$ par

$$r(v) = \begin{cases} r_1(v) & \text{si } v \in P_1 \\ r_2(\bar{u}_1 \cdot v) & \text{si } v \in u_1 \cdot P_2 \end{cases}$$

Comme r est un calcul sur $t_1 \cdot t_2$, on a donc $(r(1), r(u_1 \cdot u_2) \in \varphi_{\mathcal{A}}(t_1 \cdot t_2)$. Donc comme $r(1) = r_1(1)$ et $r(u_1 \cdot u_2) = r_2(\bar{u}_1 \cdot u_1 \cdot u_2) = r_2(u_2)$, on a bien $(p,q) = (r_1(1), r_2(u_2)) \in \varphi_{\mathcal{A}}(t_1 \cdot t_2)$.

$\varphi_{\mathcal{A}}$ préserve donc le produit disjoint. □

L'existence du prémorphisme associé à un automate nous amène donc à la propriété suivante :

Propriété 4.5.4. *Tout langage de bi-arbres reconnaissable par NFA est reconnaissable par prémorphisme adéquat.*

Démonstration. La preuve est immédiate. Pour tout NFA $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$, un bi-arbre $t=(P,u)$ est accepté par $\mathcal{A}$ si et seulement si il existe un calcul r de $\mathcal{A}$ sur t tel que $r(1) \in I$ et $r(u) \in F$, i.e. $\varphi_{\mathcal{A}}(t) \in I \times F$. Par conséquent $\mathcal{L}_{FIM(A)}(\mathcal{A}) = \varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(I \times F)$. □

On va maintenant s'intéresser au lien plus précis reliant les langages de bi-arbres reconnaissables par NFA et par prémorphisme adéquat. Janin [2013c] a montré que les langages quasi-reconnaissables sont les combinaisons booléennes de langages MSO-reconnaissables clos par le haut, et que les langages de bi-arbres reconnus par automates sont précisément les langages MSO-reconnaissables clos par le haut ; on dispose ainsi d'une preuve indirecte du théorème suivant.

Théorème 4.5.5. *Un langage de bi-arbres est reconnaissable par prémorphisme adéquat si et seulement si c'est une combinaison booléenne finie de langages reconnaissables par automates.*

Démonstration. L'objet du reste de cette section sera de fournir une preuve directe de cette équivalence. □

On remarque immédiatement que toute combinaison booléenne finie de langages reconnus par automates est quasi-reconnaissable. En effet, d'après la propriété 4.5.4, une telle combinaison est une combinaison booléenne de langages quasi-reconnaissables, et donc d'après la propriété 4.2.2, elle est quasi-reconnaissable. On arrivera à la réciproque dans la propriété 4.5.16 ci-dessous.

Pour prouver ce théorème, on va donc construire, pour tout prémorphisme adéquat φ dans un E-monoïde et toute partie X de cet E-monoïde, une famille d'automates dont une combinaison booléenne reconnaît $\varphi^{-1}(X)$. On commencera par le cas des sous-unités, en présentant des raisonnements qui pourront être largement repris dans le cas plus général. Dans la suite, on va considérer un E-monoïde M et un prémorphisme adéquat $\varphi : FIM(A) \to M$.

On introduit tout d'abord la notion d'ordres entrant et sortant : il s'agit simplement d'ordonner les sommets d'un bi-arbre en fonction de leur distance par rapport aux racines d'entrée et de sortie. On introduit pour cela l'automate $\mathcal{D}$, qui calcule ces distances modulo 3 ; on peut ainsi savoir à toute transition si l'on s'éloigne de la racine (la distance augmente de 1) ou si l'on s'en rapproche (la distance diminue de 1). C'est pour cette raison que l'on choisit de compter modulo 3 : en comptant modulo 2, on alternerait entre 0 et 1 et on ne ferait pas la distinction entre augmenter et diminuer de 1, et la nature finie des NFA ne permet pas de compter dans $\mathbb{N}$.

Rappelons que l'on note $\widetilde{A} = A \cup \bar{A}$.

Définition 4.5.2. On définit l'automate $\mathcal{D} = \langle Q_\mathcal{D}, \delta_\mathcal{D}, I_\mathcal{D}, F_\mathcal{D} \rangle$ par

- ▷ $Q_\mathcal{D} = (\widetilde{A} \cup \{\perp\}) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times (\widetilde{A} \cup \{\perp\}) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers modulo 3,
- ▷ pour tout $a \in A$, $((x_1, i_1, x_2, i_2), (y_1, j_1, y_2, j_2)) \in \delta_\mathcal{D}(a)$ lorsque
  - — d'une part $y_1 = a$, $j_1 = i_1 + 1$ ou $x_1 = \bar{a}$, $j_1 = i_1 - 1$,
  - — d'autre part $y_2 = a$, $j_2 = i_2 + 1$ ou $x_2 = \bar{a}$, $j_2 = i_2 - 1$,
- ▷ $I = \{\perp\} \times \{0\} \times (\widetilde{A} \cup \{\perp\}) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,
- ▷ $F = (\widetilde{A} \cup \{\perp\}) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \{\perp\} \times \{0\}$.

Propriété 4.5.6. *Pour tout bi-arbre $t = (P, u)$, il existe un unique calcul acceptant d de $\mathcal{D}$ sur t, et pour tout $v \in P$, $d(v) = (x_1, i_1, x_2, i_2)$, où*

- ▷ *x_1 représente la première lettre du chemin de v à l'entrée :*

$$x_1 = \begin{cases} v(|v|) & \textit{si } v \neq 1 \\ \perp & \textit{si } v = 1 \end{cases}$$

- ▷ *$i_1 = |v|$ est la distance entre l'entrée et le sommet v,*
- ▷ *x_2 représente la première lettre du chemin de v à la sortie :*

$$x_2 = \begin{cases} v(|v|) & \textit{si } v \not\leq_p u \\ u(|v|+1) & \textit{si } v <_p u \\ \perp & \textit{si } v = u \end{cases}$$

- ▷ *$i_2 = |v| + |u| - 2|u \wedge_p v|$ est la distance entre la sortie et le sommet v.*

Démonstration. Soit un bi-arbre $t = (P, u)$ et $d : P \to Q_{\mathcal{D}}$ tel que défini dans l'énoncé. On montre que d est bien un calcul sur t.

Soit $v \in P$ et $a \in \widetilde{A}$ tels que $v \cdot a \in P$. Si $v \cdot a = va$, on a donc

$$\begin{aligned} d(v) &= (x_1, |v|, x_2, |v| + |u| - 2|u \wedge_p v|) \\ d(va) &= (a, |v| + 1, y_2, |v| + 1 + |u| - 2|u \wedge_p va|) \end{aligned}$$

avec $x_1, x_2, y_2 \in \widetilde{A} \cup \{\perp\}$. On a alors deux possibilités, selon que $va \leq_p u$ ou $va \not\leq_p u$.

Si $va \leq_p u$, on a $|u \wedge_p va| = |va| = |v| + 1$, donc

$$\begin{aligned} d(va) &= (a, |v| + 1, y_2, |v| + 1 + |u| - 2|va| - 2) \\ &= (a, |v| + 1, y_2, |v| + |u| - 2|va| - 1) \end{aligned}$$

et de plus on a $v <_p u$ donc $x_2 = u(|v| + 1)$, et comme $va \leq_p u$, on a $x_2 = u(|va|) = a$. Par conséquent

$$\begin{aligned} d(v) &= (x_1, |v|, a, |v| + |u| - 2|u \wedge_p v|) \\ d(va) &= (a, |v| + 1, y_2, |v| + 1 + |u| - 2|u \wedge_p va|) \end{aligned}$$

donc $(d(v), d(va)) \in \delta(a)$.

Si $v \cdot a \neq va$, i.e. si $v = (v \cdot a)a$, on montre de manière symétrique que $(d(v \cdot a), d(v) \in \delta(a)$.

On montre maintenant que ce calcul est l'unique calcul acceptant.

Soient un bi-arbre $t = (P, u)$ et un calcul acceptant r de $\mathcal{D}$ sur t, et soit $v \in P$. Soit $(x_1, i_1, x_2, i_2) = r(v)$, on note $r_1(v) = (x_1, i_1)$ et $r_2(v) = (x_2, i_2)$. On va montrer par récurrence sur la longueur de v que $r_1(v) = (v(|v|), |v|)$.

Si $|v| = 0$ i.e. $v = 1$, alors $r_1(v) = (\perp, 0)$.

Si $|v| = 1$, ou si $|v| > 1$ et si pour tout w tel que $0 < w < |v|$, on a $r_1(w) = (w(|w|), |w|)$, il existe $a \in A$, $w \in FG(A)$ tel que $v = wa$ ou $v = w\bar{a}$. Si $v = wa$, alors $r_1(w) = (\perp, |w|)$ ou $r_1(w) = (w(|w|), |w|)$, et $w(|w|) \neq a$. Comme $(r(w), r(v)) \in \delta(a)$, on a donc $r_1(v) = (a, |w| + 1) = (v(|v|), |v|)$. De même, si $v = \bar{a}$, alors $(r(v), r(w)) \in \delta(a)$, donc comme $r_1(w) = (w(|w|), |w|)$ avec $w(|w|) \neq a$, on a $r_1(v) = (\bar{a}, |w| + 1) = (v(|v|), |v|)$.

De même, on va montrer que $r_2(v) = (x_2, i_2)$ avec

$$x_2 = \begin{cases} v(|v|) & \text{si } v \not\leq_p u \\ u(|v|+1) & \text{si } v <_p u \\ \perp & \text{si } v = u \end{cases}$$

et $i_2 = |v| + |u| - 2|u \wedge_p v|$. On considérera deux cas distincts : quand le sommet v est situé sur le chemin racine, i.e. $v \leq_p u$, et quand v est situé en dehors du chemin racine, i.e. $v \not\leq_p u$.

Soit $v \in \mathit{pref}(u)$. La distance entre u et v est donc plus simplement $|v| + |u| - 2|u \wedge_p v| = |u| - |v|$, et il existe $n \leq |u|$ tel que $v = u(1; n)$. On va démontrer par récurrence sur n que

$$r_2(v) = \begin{cases} (u(|v|+1), |u| - |v|) & \text{si } v <_p u \\ (\perp, 0) & \text{si } v = u \end{cases}$$

Si $n = |u|$, i.e. $|v| = |u|$, alors $r_2(v) = (\perp, 0)$.

Si $n < |u|$, i.e. $|v| <_p |u|$, et si pour tout $n < m < |u|$,

$$r_2(u(1; m)) = (u(m+1), |u| - m)$$
$$r_2(u) = (\perp, 0),$$

alors

$$r_2(u(1; n+1)) = \begin{cases} (u(n+2), n+1) & \text{si } n+1 < |u| \\ (\perp, |u|) & \text{si } n+1 = u \end{cases}$$

Comme r est un calcul, on a

$$(r(v), r(u(1; n+1))) = (r(u(1; n)), r(u(1; n+1))) \in \delta(u(n+1))$$

si $u(n+1) \in A$ et

$$(r(u(1; n+1)), r(v)) \in \delta(u(n+1))$$

si $\underline{u(n+1)} \in \bar{A}$. Or, comme $u \in FG(A)$, on a $u(n+2) \neq \overline{u(n+1)}$ et $\perp \neq \overline{u(n+1)}$, donc par définition de $\mathcal{D}$, on a

$$r_2(v) = (u(n+1), |u| - n + 1 - 1) = (u(n+1), |u| - n).$$

Soit $v \in P \setminus \mathit{pref}(u)$. On va démontrer par récurrence depuis le chemin racine jusqu'aux feuilles que $r_2(v) = (v(|v|), |v| + |u| - 2|u \wedge_p v|)$.

Si v est à distance 1 du chemin racine, c'est-à-dire $v = wx$ avec $w \in \mathit{pref}(u)$ et $x \in \widetilde{A}$, comme on vient de le démontrer,

$$r_2(w) = (\perp, |u| - |w|)$$
$$\text{ou}$$
$$r_2(w) = (u(|w|+1), |u| - |w|).$$

Si $x \in A$, on a $(r(w), r(v)) \in \delta(x)$. Comme $v \notin \mathit{pref}(u)$, on a $u(|w|+1) \neq x$, et $\perp \neq x$, donc $r_2(v) = (x, |u| - |w| + 1)$. Comme $w = u \wedge_p v$, on a

$$\begin{aligned} |u| + |v| - 2|u \wedge_p v| &= |u| + |v| - 2|w| \\ &= |u| + (|w|+1) - 2|w| \\ &= |u| - |w| + 1 \end{aligned}$$

donc $r_2(v) = (v(|v|), |u| + |v| - 2|u \wedge_p v|)$. Symétriquement, si $x \in \bar{A}$, on a $(r(v), r(w)) \in \delta(\bar{x})$, et comme $u(|w|+1) \neq x$ et $\perp \neq x$, on a

$$r_2(v) = (v(|v|), |u| + |v| - 2|u \wedge_p v|).$$

Si v est à une distance supérieure à 1 du chemin racine, c'est-à-dire $v = ww'x$ avec $w \in \mathit{pref}(u)$, $w' \in FG(A) \setminus \{1\}$ et $x \in \widetilde{A}$, et que pour tout sommet plus proche du chemin racine, c'est-à-dire pour tout $v_0 = w_0 w_0'$ avec $w_0 \in \mathit{pref}(u)$ et $w_0' \in FG(A) \setminus \{1\}$ avec $|w_0'| \leq |w'|$, on a

$$r_2(v_0) = (v_0(|v_0|), |u| + |v_0| - 2|u \wedge_p v_0|)$$

alors

$$\begin{aligned} r_2(ww') &= ((ww')(|ww'|), |u| + |ww'| - 2|w|) \\ &= (w'(|w'|), |u| + |w'| - |w|) \end{aligned}$$

On démontre alors de manière similaire que

$$r_2(v) = (v(|v|), |u| + |v| - 2|u \wedge_p v|).$$

□

Dans la suite, pour tout bi-arbre (P, u), on notera $d(v)$ l'image d'un sommet $v \in P$ par l'unique calcul de $\mathcal{D}$ sur (P, u). Pour tous $\varrho, \varrho' \in Q_{\mathcal{D}}$ avec $\varrho = (x_1, i_1, x_2, i_2)$ et $\varrho' = (x_1', i_1', x_2', i_2')$, on note $\varrho \ll_I \varrho'$ quand $i_1' = i_1 + 1$, et $\varrho \ll_O \varrho'$ quand $i_2' = i_2 + 1$.

Définition 4.5.3. Soit un ensemble de sous-unités $X \subseteq U(M)$, on définit le NFA sur les idempotents associé à φ et X par $\mathcal{E}_{\varphi,X} = \langle Q, \delta, I, F \rangle$ avec

▷ $Q = U(M) \times (\widetilde{A} \cup \{\perp\}) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,

- Pour tous $a \in A$ et $(p, x, i), (q, y, j) \in Q$, $((p, x, i), (q, y, j)) \in \delta(a)$ lorsque ou

$$p \leq (\varphi(a) \cdot q)^R, y = a, j = i + 1$$

ou bien

$$q \leq (\varphi(\bar{a}) \cdot p)^R, x = \bar{a}, i = j + 1.$$

- $I = F = X \times \{\perp\} \times \{0\}$.

Le fonctionnement de cet automate se décompose en deux parties. D'une part, l'automate compte la distance par rapport à la racine modulo 3, de façon analogue à $\mathcal{D}$, pour de savoir à tout instant du calcul si l'on s'éloigne ou si l'on se rapproche de la racine d'entrée. D'autre part, dans chaque état, l'automate calcule l'image du sous-arbre ayant cet état pour racine, et élagué de tout sommet plus proche de la racine ; cette image est stockée dans chaque état par l'élément de $U(M)$.

Dans la mesure où les langages de bi-arbres reconnus par NFA sont clos par le haut, il est clair que dans le cas général, aucun automate ne pourra reconnaître le langage de sous-unités $\varphi^{-1}(X)$. Celui-ci sera néanmoins d'une grande utilité pour établir le lien entre langages reconnus par NFA et par prémorphismes adéquats.

Voici quelques notations qui seront nécessaires : tous d'abord, pour tout calcul r de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ et tout $v \in P$, on notera $r_M(v)$ l'image de $r(v)$ par la projection de $U(M) \times (\widetilde{A} \cup \{\perp\}) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $U(M)$. De plus, on présente les notations désignant certains sous-arbres particuliers d'un bi-arbre : le bi-arbre e_v, qui a pour entrée et sortie le sommet v et est élagué de tous sommet plus proche de la racine de t, et le bi-arbre e_v^x, qui est e_v élagué de toute arrête incidente à la racine non-étiquetée x.

Définition 4.5.4. Soit un bi-arbre $t = (P, u)$, pour tout $v \in P$, on définit l'idempotent $e_v = (P_v, 1)$ par

$$P_v = \bar{v} \cdot \{w \in P \mid v \leq_p w\}.$$

De plus, pour tout $x \in P_v \cap \widetilde{A}$, c'est à dire pour tout x étiquetant une arête incidente à la racine d'entrée et sortie de e_v, on définit $e_v^x = (P_v^x, 1)$ par $e_v^x = (x \cdot e_{vx})^R$.

On remarque alors que

$$\begin{aligned} e_v^x &= ((\{1, x\}, x) \cdot (P_{vx}, 1))^R \\ &= (\{1, x\} \cup x \cdot P_{vx}, x)^R \\ &= (\{1, x\} \cup x \cdot P_{vx}, 1) \end{aligned}$$

On a donc $P_v^x = \{1, x\} \cup x \cdot P_{vx}$, donc comme $x \in P_{vx}$, on a $P_v^x = \{1\} \cup x \cdot P_{vx}$, or

$$\begin{aligned} x \cdot P_{vx} &= x \cdot \overline{vx} \cdot \{w \in P \mid v \cdot x \leq_p w\} \\ &= \bar{v} \cdot \{w \in P \mid v \cdot x \leq_p w\} \\ &= \{w \in P_v \mid x \leq_p w\}. \end{aligned}$$

donc $P_v^x = \{w \in P_v \mid x \leq_p w\} \cup \{1\}$.

Par conséquent, comme $1 \in P_v$, on a $P_v^x \subseteq P_v$, donc $e_v \leq e_v^x$.

Exemple. On considère le bi-arbre $t = (P, abc)$ avec

$$P = \{1, \bar{a}, \bar{b}, a, ab, ab\bar{c}, aba, abaa, abab, abb, abc, abca\}.$$

Ce bi-arbre est illustré figure 4.4. On a donc $e_{ab} = (P_{ab}, 1)$ avec

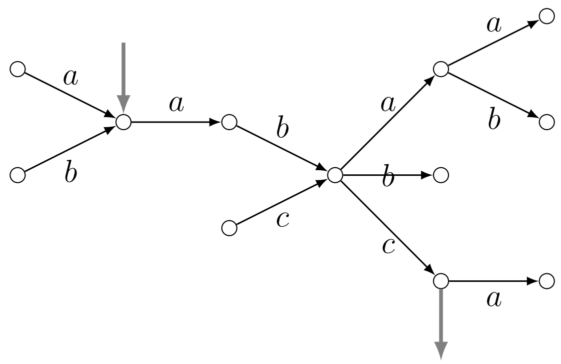
$$\begin{aligned} P_{ab} &= \overline{ab} \cdot \{w \in P \mid ab \leq_p w\} \\ &= \bar{b}\bar{a} \cdot \{ab, ab\bar{c}, aba, abaa, abab, abb, abc, abca\} \\ &= \{1, \bar{c}, a, aa, ab, b, c, ca\} \end{aligned}$$

et $e_{ab}^a = (P_{ab}^a, 1)$ avec

$$\begin{aligned} P_{ab}^a &= \{w \in P_{ab} \mid a \leq_p w\} \cup \{1\} \\ &= \{1, \bar{c}, a, aa, ab\} \end{aligned}$$

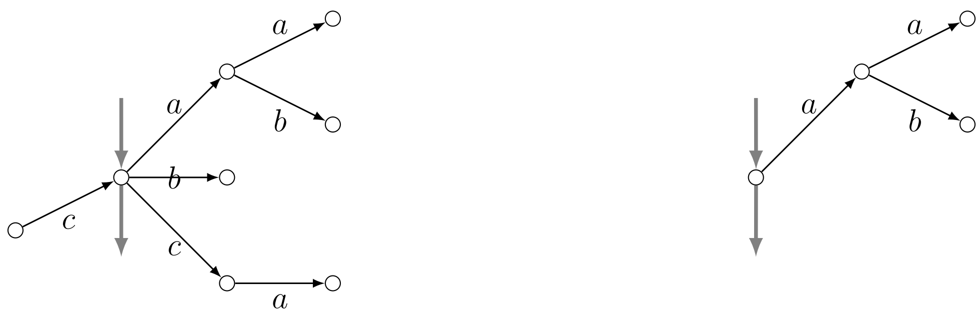
Les bi-arbres idempotents e_{ab} et e_{ab}^a sont illustrés figure 4.5.

FIGURE 4.4 – Le bi-arbre $t = (P, abc)$.



Propriété 4.5.7. *Pour tout idempotent $t \in U(FIM(A))$, il existe un calcul r de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ sur t tel que $r(1) = (\varphi(t), \perp, 0)$.*

FIGURE 4.5 – Le bi-arbre $e_{ab} = (\overline{ab} \cdot \{w \in P \mid ab \leq_p w\}, 1)$ et le bi-arbre $e^a_{ab} = (\{w \in P_v \mid x \leq_p w\} \cup \{1\}, 1)$.



Démonstration. Soit un idempotent $t = (P, 1)$, on définit $r : P \to Q$ par

$$\begin{aligned} r(v) &= (\varphi(e_v), v(|v|), |v|) \text{ pour tout } v \neq 1, \\ r(1) &= (\varphi(e_1), \perp, |1|) = (\varphi(t), \perp, 0). \end{aligned}$$

On rappelle que $|v|$ est exprimée dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, c'est à dire modulo 3.

On montre que r est bien un calcul de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$: soit $v \in P$ et $x \in \widetilde{A}$ tel que $vx \in P$, on a donc

$$\begin{aligned} r(v) &= (\varphi(e_v), v(|v|), |v|), \\ r(vx) &= (\varphi(e_{vx}), (vx)(|vx|), |vx|) = (\varphi(e_{vx}), x, |v| + 1). \end{aligned}$$

De plus, par préservation du produit disjoint, on a

$$(\varphi(x) \cdot \varphi(e_{vx}))^R = \varphi(x \cdot e_{vx})^R = \varphi(e^x_v),$$

or $e_v \leq e^x_v$ donc $\varphi(e_v) \leq \varphi(x \cdot e_{vx})^R$. Donc si $x \in A$, on a $(r(v), r(vx)) \in \delta(x)$; et si $x \in \bar{A}$, on a $(r(vx), r(v)) \in \delta(\bar{x})$. Par conséquent r est donc bien un calcul de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ sur t. □

Propriété 4.5.8. *Soit un idempotent $t = (P, 1) \in U(FIM(A))$ et un calcul r de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ sur t. Pour tout $v \in P$, on a $r_M(v) \leq \varphi(e_v)$.*

Démonstration. Soit un calcul r de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ sur un idempotent $t = (P, 1) \in U(FIM(A))$. On va procéder par récurrence sur les éléments de P ordonnés par l'ordre préfixe ; on notera ainsi $max(P)$ les éléments maximaux de P pour $\leq_p$, c'est-à-dire les feuilles du bi-arbre.

Soit $v \in max(P)$, on a $e_v = 1$ donc $\varphi(e_v) = 1$. Comme $r_M(v) \in U(M)$, on a $r_M(v) \leq \varphi(e_v)$.

On remarque que par définition $P_v \cap \widetilde{A} = \{x \in \widetilde{A} \mid vx \in P\}$. Soit $v \in P$ tel que pour tout $x \in P_v \cap \widetilde{A}$, on a $r_M(vx) \leq \varphi(e_{vx})$. Par définition de la fonction de transition δ, pour tout $x \in P_v \cap \widetilde{A}$, on a

$$r_M(v) \leq (\varphi(x) \cdot r_M(vx))^R,$$

donc par l'hypothèse de récurrence,

$$r_M(v) \leq (\varphi(x) \cdot \varphi(e_{vx}))^R.$$

On remarque que le produit disjoint $x \star e_{vx}$ est défini. En effet $x^L = \{1, \bar{x}\}$, et $\bar{x} \notin P_{vx}$, sans quoi P contiendrait l'élément $vx\bar{x} \notin FG(A)$. Donc comme φ préserve le produit disjoint,

$$r_M(v) \leq \varphi(x \cdot e_{vx})^R.$$

Donc par définition de e_v^x,

$$r_M(v) \leq \varphi(e_v^x).$$

Comme M est un E-monoïde, par (A1) dans la définition 4.2.1, pour tout $x \in P_v \cap \widetilde{A}$ on a $r_M(v) = r_M(v) \cdot \varphi(e_v^x)$, donc

$$r_M(v) = r_M(v) \cdot \prod_{x \in P_v \cap \widetilde{A}} \varphi(e_v^x),$$

donc par (A1)

$$r_M(v) \leq \prod_{x \in P_v \cap \widetilde{A}} \varphi(e_v^x).$$

Or, comme $P_v^x = \{w \in P_v \mid x \leq_p w\} \cup \{1\}$, on a

$$e_v = \prod_{x \in P_v \cap \widetilde{A}} e_v^x$$

et on note que ce produit est disjoint, puisque pour tout $x \in P_v \cap \widetilde{A}$, tous les éléments de P_v^x à part 1 sont de la forme xw. Donc par préservation du produit disjoint

$$\varphi(e_v) = \prod_{x \in P_v \cap \widetilde{A}} \varphi(e_v^x)$$

On a donc $r_M(v) \leq \varphi(e_v)$.

Par récurrence, on a donc $r_M(v) \leq \varphi(e_v)$ pour tout $v \in P$. $\square$

On remarque que $P_1 = 1 \cdot \{v \in P \mid 1 \leq_p v\} = P$, donc $e_1 = (P, 1)$, d'où le corollaire suivant :

Corollaire 4.5.9. *Soit un calcul r de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ sur un idempotent $t \in U(FIM(A))$, alors $r_M(1) \leq \varphi(t)$.*

Propriété 4.5.10. *Pour tout $X \subseteq U(M)$, l'ensemble des sous-unités reconnues par $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ est le langage $\varphi^{-1}(X^{\uparrow})$.*

Démonstration. Soit $X \subseteq U(M)$.

Soit $t \in U(FIM(A))$ accepté par $\mathcal{E}_{\varphi,X}$, il existe alors un calcul r de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ sur t tel que $r_M(1) \in X$. Or, par le corollaire 4.5.9, on a $r_M(1) \leq \varphi(t)$, donc $\varphi(t) \in X^{\uparrow}$. Donc $t \in \varphi^{-1}(X^{\uparrow})$.

Réciproquement, soit $t = (P, u) \in \varphi^{-1}(X^{\uparrow})$, il existe donc $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq \varphi(t)$. Par la propriété 4.5.7, il existe un calcul r de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ sur t tel que $r(1) = (\varphi(t), \perp, 0)$. Soit $s : P \to Q$ défini par

$$\begin{aligned} &s(v) = r(v) \text{ pour tout } v \neq 1,\\ &s(1) = (x_0, \perp, 0). \end{aligned}$$

Pour tout $a \in P \cap A$, on a donc, comme r est un calcul,

$$(r(1), r(a)) = ((r_M(1), \perp, 0), (r_M(a), a, 1)) \in \delta(a),$$

donc

$$r_M(1) \leq (\varphi(a) \cdot r_M(a))^R.$$

Donc comme $x_0 \leq \varphi(t)$ et $r_M(1) = \varphi(t)$, on a

$$x_0 \leq (\varphi(a) \cdot r_M(a))^R$$

et donc par définition de s, on a $(s(1), s(a)) = ((x_0, \perp, 0), (r_M(a), a, 1)) \in \delta(a)$. On montre de manière similaire que pour tout $\bar{a} \in P \cap \bar{A}$, on a $(r(\bar{a}), r(1)) = ((r_M(\bar{a}), \bar{a}, 1), (r_M(1), \perp, 0)) \in \delta(\bar{a})$, donc

$$r_M(1) \leq (\varphi(\bar{a}) \cdot r_M(\bar{a}))^R.$$

Et donc comme $x_0 \leq \varphi(t)$ et $r_M(1) = \varphi(t)$, on a

$$x_0 \leq (\varphi(\bar{a}) \cdot r_M(\bar{a}))^R$$

et donc par définition de s, on a $(s(\bar{a}), s(1)) = ((r_M(\bar{a}), \bar{a}, 1), (x_0, \perp, 0)) \in \delta(\bar{a})$. Comme s est identique à r pour tout $v \neq 1$, s est donc bien un calcul de $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ sur t ; et comme $s(1) = (x_0, \perp, 0)$, c'est un calcul acceptant. □

L'ensemble des sous-unités est reconnaissable par automate, par le théorème 4.3.2, puisqu'il est MSO-définissable et clos par le haut ; la construction de cet automate est par ailleurs triviale. L'ensemble des langages reconnus par automates étant clos par intersection, on a donc :

Corollaire 4.5.11. *Pour tout $X \subseteq U(M)$, l'automate $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ reconnaît le langage $\varphi^{-1}(X^{\uparrow})$.*

On présente maintenant l'automate $\mathcal{A}_{\varphi,X}$, similaire à $\mathcal{E}_{\varphi,X}$ mais destiné à reconnaître $\varphi^{-1}(X^{\uparrow})$ dans le cas général où X ne contient pas que des sous-unités.

Définition 4.5.5. Soit $X \subseteq M$, on définit le NFA associé à φ et X par $\mathcal{A}_{\varphi,X} = \langle Q, \delta, I, F\rangle$ avec

- ▷ $Q = M \times Q_{\mathcal{D}}$,
- ▷ pour tout $a \in A$, pour tous $(q_1, \varrho_1), (q_2, \varrho_2) \in Q$, $((q_1, \varrho_1), (q_2, \varrho_2)) \in \delta(a)$ lorsque $(\varrho_1, \varrho_2) \in \delta_{\mathcal{D}}(a)$, et d'autre part ou
$$q_1^L \leq (\varphi(a) \cdot q_2)^R, \varrho_1 \ll_O \varrho_2, \varrho_1 \ll_I \varrho_2$$
ou bien
$$q_2^L \leq (\varphi(\bar{a}) \cdot q_1)^R, \varrho_2 \ll_O \varrho_1, \varrho_2 \ll_I \varrho_1$$
ou bien
$$q_2 \leq q_1 \cdot \varphi(a), \varrho_1 \ll_O \varrho_2, \varrho_2 \ll_I \varrho_1$$
ou bien
$$q_1 \leq q_2 \cdot \varphi(\bar{a}), \varrho_2 \ll_O \varrho_1, \varrho_1 \ll_I \varrho_2$$
- ▷ $I = U(M) \times I_{\mathcal{D}}$,
- ▷ $F = X \times F_{\mathcal{D}}$,

où $Q_{\mathcal{D}}$, $\delta_{\mathcal{D}}$, $I_{\mathcal{D}}$ et $F_{\mathcal{D}}$ sont respectivement l'ensemble des états, la fonction de transition, l'ensemble des états initiaux et l'ensemble des états finaux de l'automate $\mathcal{D}$, c.f. définition 4.5.2.

L'automate $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ "contient" donc l'automate $\mathcal{D}$, ce qui lui permet de connaître à tout instant la distance modulo 3 par rapport aux racines d'entrée et de sortie, et donc de savoir à chaque transition si la distance à chacune de ces racines augmente ou diminue. Cela lui permet de déterminer deux "modes" de l'automate : lorsque la distance à l'entrée augmente mais que la distance à la sortie diminue, l'automate est donc en train de lire le chemin racine ; lorsque la distance à l'entrée et à la sortie diminuent, l'automate est donc en train de lire une lettre hors du chemin racine.

Le principe de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ est de décomposer tout bi-arbre en un produit disjoint d'idempotents et de bi-arbres d'une seule lettre. Le chemin racine est décomposé en bi-arbres d'une lettre, entre lesquels s'intercalent les idempotents représentant le reste du bi-arbre : soit un bi-arbre $t = (P, u)$, on définit pour tout $0 \leq i \leq |u|$ l'idempotent $f_i = (F_i, 1)$ par

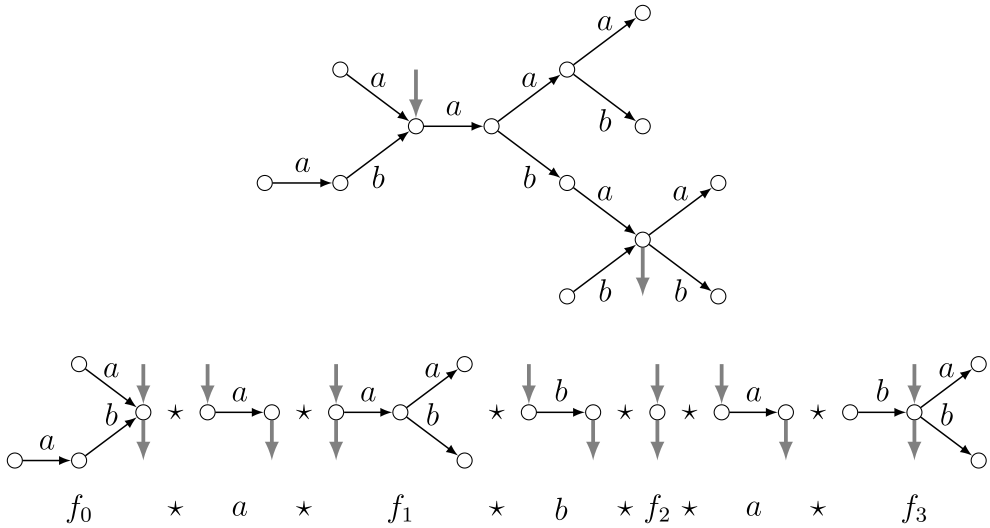
$$\begin{aligned} F_i &= P_{u(1;i)} \setminus u(i; i+1)FG(A) \\ &= \overline{u(1;i)} \cdot \{v \in P \mid u(1;i) \leq_p v, u(1;i+1) \not\leq_p v\} \end{aligned}$$

On peut donc décomposer le bi-arbre t en un produit disjoint

$$t = f_0 \star u(1) \star f_1 \star \ldots \star u(n) \star f_n$$

comme illustré figure 4.6.

Figure 4.6 – $t = (\{1, \bar{a}, \bar{b}\bar{a}, a, aa, aaa, aab, ab, aba, aba\bar{b}, abaa, abab\}, aba)$ et sa décomposition en un produit disjoint d'idempotents f_i et de bi-arbres d'une lettre.



Définition 4.5.6. Pour tout bi-arbre $t = (P, u)$, on définit le calcul canonique $r_t : P \to Q$ de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur t par, pour tout $v \notin \mathit{pref}(u)$,

$$r_t(v) = (\varphi(e_v), d(v))$$

pour tout $v \in \mathit{pref}(u) \setminus \{1\}$,

$$r_t(v) = (\varphi(t_v), d(v)),$$

avec $t_v = f_0 \star \prod_{1 \leq i \leq |v|} v(|i|) \star f_i$; et enfin, l'image de 1 est

$$r_t(1) = (\varphi(t_0), d(1)).$$

où d est l'unique calcul acceptant de $\mathcal{D}$ sur t, c.f. propriété 4.5.6.

Montrons que r_t est effectivement un calcul :

Propriété 4.5.12. *Pour tout $t = (P, u) \in \mathit{FIM}(A)$, le calcul canonique r_t est un calcul de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur t.*

Démonstration. Soit un bi-arbre $t = (P, u)$. Soient $v \in P$ et $a \in A$ tel que $v \cdot a \in P$, on a donc ou $v(|v|) \neq \bar{a}$ et $v \cdot a = va$, ou bien $v(|v|) = \bar{a}$ et $v = (v \cdot a)\bar{a}$.

La transition entre v et $v \cdot a$ peut donc prendre trois configurations possibles : (i) $v, v \cdot a \in \mathit{pref}(u)$, ou (ii) $v, v \cdot a \notin \mathit{pref}(u)$, ou bien (iii) $v \in \mathit{pref}(u)$ et $v \cdot a \notin \mathit{pref}(u)$.

(i) Si $v, v \cdot a \in \mathit{pref}(u)$. Si $v \cdot a = va$, on a donc d'une part

$$r_t(v) = \begin{cases} (\varphi(t_v), d(v)) & \text{si } v \neq 1, \\ (\varphi(t_v), d(v)) & \text{si } v = 1, \end{cases}$$

et d'autre part $r_t(va) = (\varphi(t_{va}), d(va))$.

Comme $t_{va} = t_v \cdot a \cdot f_{|v|+1}$, on a donc $t_{va} \leq t_v \cdot a$ et donc par préservation de l'ordre et sous-multiplicativité, on a $\varphi(t_{va}) \leq \varphi(t_v) \cdot \varphi(a)$. Donc on a $(r_t(v), r_t(va)) \in \delta(a)$.

Si $v = (v \cdot a)\bar{a}$, la preuve est symétrique. On a d'une part

$$r_t(v \cdot a) = \begin{cases} (\varphi(t_{v \cdot a}), d(v \cdot a)) & \text{si } v \cdot a \neq 1, \\ (\varphi(t_{v \cdot a}), d(v \cdot a)) & \text{si } v \cdot a = 1, \end{cases}$$

et d'autre part $r_t(v) = (\varphi(t_v), d(v))$.

Comme $t_v = t_{v \cdot a} \cdot \bar{a} \cdot f_{|v \cdot a|+1}$, on a donc $t_v \leq t_{v \cdot a} \cdot \bar{a}$ et donc par préservation de l'ordre et sous-multiplicativité, on a $\varphi(t_v) \leq \varphi(t_{v \cdot a}) \cdot \varphi(a)$. Donc on a $(r_t(v), r_t(va)) \in \delta(a)$.

(ii) Si $v, v \cdot a \notin \mathit{pref}(u)$. Si $v \cdot a = va$, on a donc d'une part

$$r_t(v) = (\varphi(e_v), d(v)),$$

et d'autre part

$$r_t(va) = (\varphi(e_{va}), d(va)).$$

Comme $(a \star e_{va})^R = e_v^a$ et $e_v \leq e_v^a$, par préservation de l'ordre

$$\varphi(e_v) \leq \varphi(a \star e_{va})^R,$$

donc par préservation du produit disjoint

$$\varphi(e_v) \leq (\varphi(a) \cdot \varphi(e_{va}))^R.$$

De plus $e_v \leq 1$ donc $\varphi(e_v) \leq 1$, et donc $\varphi(e_v)^L = \varphi(e_v)$. On a donc

$$\varphi(e_v)^L \leq (\varphi(a) \cdot \varphi(e_{va}))^R.$$

Donc on a $(r_t(v), r_t(va)) \in \delta(a)$.

Si $v = (v \cdot a)\bar{a}$, on a symétriquement $(r_t(v), r_t(va)) \in \delta(a)$.

(iii) Si $v \in \mathit{pref}(u)$ et $v \cdot a \notin \mathit{pref}(u)$, i.e. $v \leq_p u$ et $va \not\leq_p u$, on a donc d'une part

$$r_t(v) = \begin{cases} (\varphi(t_v), d(v)) & \text{si } v \neq 1, \\ (\varphi(t_v), d(v)) & \text{si } v = 1, \end{cases}$$

et d'autre part

$$r_t(va) = (\varphi(e_{va}), d(va)).$$

Comme $v \leq_p u$, on a $v = u(1;|v|)$. Par définition du bi-arbre $f_{|v|}$, on a donc $f_{|v|} = (F_{|v|}, 1)$ avec

$$F_{|v|} = \bar{v} \cdot \{w \in P \mid v \leq_p w, vu(|v|+1) \not\leq_p w\}.$$

Par ailleurs, $(a \star e_{va})^R = e_v^a = (P_v^a, 1)$ avec

$$P_v^a = \bar{v} \cdot \{w \in P \mid va \leq_p w\} \cup \{1\}.$$

Comme $va \not\leq_p u$, on a donc $a \neq u(|v|+1)$, donc $P_v^a \subseteq F_{|v|}$, donc $f_{|v|} \leq e_v^a$, d'où

$$f_{|v|} \leq (a \star e_{va})^R.$$

Or $t_v = f_0 \cdot u(1) \cdot \ldots \cdot u(|v|) \cdot f_{|v|}$, donc par la semi-congruence (A4) de la définition 4.2.1,

$$t_v^L = ((f_0 \cdot u(1) \cdot \ldots \cdot u(|v|))^L \cdot f_{|v|})^L,$$

et comme $f_{|v|} \leq 1$ et $(f_0 \cdot u(1) \cdot \ldots \cdot u(|v|))^L \leq 1$, on a

$$t_v^L = (f_0 \cdot u(1) \cdot \ldots \cdot u(|v|))^L \cdot f_{|v|},$$

donc $t_v^L \leq f_{|v|}$. Par conséquent

$$t_v^L \leq (a \star e_{va})^R,$$

donc par préservation de l'ordre, des projections et du produit disjoint,

$$\varphi(t_v)^L \leq (\varphi(a) \star \varphi(e_{va}))^R$$

Donc si $a \in A$, on a $(r_t(v), r_t(va)) \in \delta(a)$ et si $a \in \bar{A}$, on a $(r_t(va), r_t(v)) \in \delta(\bar{a})$.

Si $v = (v \cdot a)\bar{a}$, on a symétriquement $(r_t(v), r_t(va)) \in \delta(a)$. $\square$

Pour tout calcul r de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur une tuile $t = (P, u)$ et tout $v \in P$, on notera $r_M(v)$ l'image de $r(v)$ par la projection de $M \times (\widetilde{A} \cup \{\perp\}) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans M.

Propriété 4.5.13. *Pour tout bi-arbre $t = (P, u)$ et tout calcul acceptant r de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur t, pour tout $v \in P$,*

i. si $v \notin pref(u)$, alors $r_M(v) \leq \varphi(e_v)$,

ii. si $v \in pref(u)$, alors $r_M(v) \leq \varphi(t_v)$, avec $t_v = f_0 \star \prod_{1 \leq i \leq |v|} v(|i|) \star f_i$.

Démonstration. Soit un calcul acceptant r de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur un bi-arbre $t = (P, u)$.

(Cas i.) Soit $v \in P \setminus pref(u)$. On va procéder par récurrence sur les éléments de P ordonnés par l'ordre préfixe ; on notera ainsi $max(P)$ les éléments maximaux de P pour $\leq_p$, c'est-à-dire les feuilles du bi-arbre.

Dans les cas où $v \in max(P)$, on a $e_v = 1$ donc $\varphi(e_v) = 1$. Comme $r_M(v) \in U(M)$, on a $r_M(v) \leq \varphi(e_v)$.

On remarque que par définition $P_v \cap \widetilde{A} = \{x \in \widetilde{A} \mid vx \in P\}$. Soit $v \in P$ tel que pour tout $x \in P_v \cap \widetilde{A}$, on a $r_M(vx) \leq \varphi(e_{vx})$. Par définition de la fonction de transition δ, pour tout $x \in P_v \cap \widetilde{A}$, on a

$$r_M(v) \leq (\varphi(x) \cdot r_M(vx))^R,$$

donc par l'hypothèse de récurrence,

$$r_M(v) \leq (\varphi(x) \cdot \varphi(e_{vx}))^R.$$

On remarque que le produit disjoint $x \star e_{vx}$ est défini. En effet $x^L = \{1, \bar{x}\}$, et $\bar{x} \notin P_{vx}$, sans quoi P contiendrait l'élément $vx\bar{x} \notin FG(A)$. Donc comme φ préserve le produit disjoint,

$$r_M(v) \leq \varphi(x \cdot e_{vx})^R.$$

Donc par définition de e_v^x,

$$r_M(v) \leq \varphi(e_v^x)^R.$$

Comme M est un E-monoïde, par (A1) dans la définition 4.2.1, pour tout $x \in P_v \cap \widetilde{A}$ on a $r_M(v) = r_M(v) \cdot \varphi(e_v^x)^R$, donc

$$r_M(v) = r_M(v) \cdot \prod_{x \in P_v \cap \widetilde{A}} \varphi(e_v^x)^R,$$

donc par (A1)

$$r_M(v) \leq \prod_{x \in P_v \cap \widetilde{A}} \varphi(e_v^x)^R.$$

Or, comme $P_v^x = \{w \in P_v \mid x \leq_p w\} \cup \{1\}$, on a

$$e_v = \prod_{x \in P_v \cap \widetilde{A}} e_v^x$$

et on note que ce produit est disjoint, puisque pour tout $x \in P_v \cap \widetilde{A}$, tous les éléments de P_v^x à part 1 sont de la forme xw. Donc par préservation du produit disjoint

$$\varphi(e_v) = \prod_{x \in P_v \cap \widetilde{A}} \varphi(e_v^x)$$

On a donc $r_M(v) \leq \varphi(e_v)$.

Par récurrence, on a donc $r_M(v) \leq \varphi(e_v)$ pour tout $v \in P$.

(Cas ii.) Soit $v \in pref(u)$. On va procéder par récurrence sur les préfixes de u ordonnés par l'ordre préfixe.

Dans le cas où $v = 1$, pour tout x tel que $1 \cdot x \in F_0$, on a $d(1) \ll_I d(x)$ et $d(1) \ll_O d(x)$. Selon que $x \in A$ ou $x \in \bar{A}$, il n'y a donc que deux transitions possibles entre les deux états : on a donc $r_M(1)^L \leq (\varphi(x) \cdot r_M(x))^R$, donc $r_M(1)^L \leq \varphi(e_1^x)$. Notons que $r_M(1) \in U(M)$ donc $r_M(1)^L = r_M(1)$. Par la propriété A1 des E-monoïdes, on a donc $r_M(1) \leq \prod_{x \in F_0 \cap \widetilde{A}} \varphi(e_1^x) = f_0$.

Soit $v \in \mathit{pref}(u)$ tel que $v \neq u$ et tel que la propriété soit vraie pour tout $w \leq_p v$. Soit $x = u(|v| + 1)$. Par la propriété 4.5.6, on a $d(v) \ll_I d(vx)$ et $d(vx) \ll_O d(v)$. Selon que $x \in A$ ou $x \in \bar{A}$, il n'y a donc que deux transitions possibles entre les deux états : on a donc $r_M(vx) \leq r_M(v) \cdot \varphi(x)$. Et comme dans le cas précédent, on a $r_M(vx)^L \leq f_{i+1}$, donc $r_M(vx) \leq t_v \cdot \varphi(x) \cdot f_{i+1} = t_{vx}$. □

Corollaire 4.5.14. *Pour tout bi-arbre $t = (P, u)$, le calcul canonique r_t est le plus grand calcul de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur t, au sens de l'ordre produit.*

Propriété 4.5.15. *L'automate $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ reconnaît le langage $\varphi^{-1}(X^\uparrow)$.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Soient $p_0 \in X$ et $p \in M$ tel que $p_0 \leq p$. Soient un bi-arbre $t = (P, u) \in \varphi^{-1}(p)$ et le calcul canonique r_t de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur t.

On définit $r_0 : Q \to M$ par

$$r_0(u) = (p_0, d(u)),$$
$$r_0(v) = r_t(v) \text{ pour tout } v \neq u.$$

On va montrer que r_0 est également un calcul de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur t ; comme r_0 est identique au calcul t en tout point autre que u, on ne s'intéressera qu'aux transitions autour de u, c'est à dire les $a \in A$, $v \in P$ tels que $v \cdot a = u$ ou $u \cdot a = v$.

Soient $a \in A$, $v \in P$ tels que $u \cdot a = v$. On a alors $v = ua$ ou $u = v\bar{a}$. Comme r_t est un calcul, on a $(r_t(u), r_t(v)) \in \delta(a)$. Par définition de r_t, on a deux possibilités quant à $r_t(v)$, selon que (i) $v \leq_p u$, ou (ii) $v \not\leq_p u$.

(i) Si $v \leq_p u$, on a donc $v \neq ua$ et donc $u = v\bar{a}$; et par définition de r_t,

$$r_t(v) = \begin{cases} (\varphi(t_v), v(|v|), |v|, |u| - |v|) & \text{si } v \neq 1, \\ (\varphi(t_v), \perp, |v|, |u| - |v|) & \text{si } v = 1, \end{cases}$$

donc comme $u = v\bar{a}$,

$$r_t(v) = \begin{cases} (\varphi(t_v), v(|v|), |u| - 1, 1) & \text{si } v \neq 1, \\ (\varphi(t_v), \perp, |u| - 1, 1) & \text{si } v = 1. \end{cases}$$

Donc par définition de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$, comme $r_t(u) = (p, u(|u|), |u|, 0) = (p, \bar{a}, |u|, 0)$,

$$p \leq \varphi(t_v) \cdot \varphi(\bar{a}),$$

et comme $p_0 \leq p$,

$$p_0 \leq \varphi(t_v) \cdot \varphi(\bar{a}).$$

Donc comme $r_0(u) = (p_0, u(|u|), |u|, 0) = (p_0, \bar{a}, |u|, 0)$ et $r_0(v) = r_t(v)$, on a bien $(r_0(u), r_0(v)) \in \delta(a)$.

(ii) Si $v \not\leq_p u$, on a donc $u \neq v\bar{a}$ et donc $v = ua$; et par définition de r_t,

$$\begin{aligned} r_t(v) &= (\varphi(e_v), v(|v|), |v|, n_v) \\ &= (\varphi(e_v), ua(|ua|), |ua|, n_{ua}) \\ &= (\varphi(e_v), a, |u| + 1, 1) \end{aligned}$$

Donc par définition de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$, comme $r_t(u) = (p, u(|u|), |u|, 0)$,

$$p^L \leq (\varphi(a) \cdot \varphi(e_v))^R,$$

et comme $p_0 \leq p$, on a $p_0^L \leq p^L$, donc

$$p_0^L \leq (\varphi(a) \cdot \varphi(e_v))^R.$$

Donc comme $r_0(u) = (p_0, u(|u|), |u|, 0)$ et $r_0(v) = r_t(v) = (\varphi(e_v), a, |u| + 1, 1)$, on a bien $(r_0(u), r_0(v)) \in \delta(a)$.

Soient $a \in A$, $v \in P$ tels que $v \cdot a = u$, on montre symétriquement que $(r_0(v), r_0(u)) \in \delta(a)$.

L'application r_0 est donc bien un calcul de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur t. C'est de plus un calcul acceptant, puisque

$$\begin{aligned} r_0(1) = r_t(1) &= (\varphi(f_0), \perp, 0, |u|) \in U(M) \times \{\perp\} \times \{0\} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ r_0(u) &= (p_0, u(|u|), |u|, 0) \in X \times (\widetilde{A} \cup \{\perp\}) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \{0\} \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Soit un bi-arbre $t = (P, u)$ tel qu'il existe un calcul acceptant r de $\mathcal{A}_{\varphi,X}$ sur t. D'après le corollaire 4.5.14, le calcul canonique r_t vérifie $r(u) \leq r_t(u)$, donc $r_M(u) \leq \varphi(t)$. Comme r est acceptant, on a $r_M(u) \in X$, donc $\varphi(t) \in X^\uparrow$ i.e $\varphi^{-1}(X^\uparrow)$. □

On en arrive ainsi à la propriété finale permettant de prouver le théorème 4.5.5 :

Propriété 4.5.16. *Tout langage de bi-arbres $L \subsetneq FIM(A)$ reconnaissable par prémorphisme adéquat est une combinaison booléenne finie de langages reconnaissables par automates.*

Démonstration. Soit un langage $\varphi^{-1}(X)$ avec $X \subsetneq M$. Comme M est fini, l'ensemble X est une union finie de singletons $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$, et donc

$$\varphi^{-1}(X) = \bigcup_{x \in X} \varphi^{-1}(\{x\}).$$

Le langage $\varphi^{-1}(X)$ est donc une combinaison booléenne finie de langages de la forme $\varphi^{-1}(\{x\})$. On va maintenant prouver que tout langage de la forme $\varphi^{-1}(\{x\})$ est lui-même une combinaison booléenne finie de langages reconnaissables par automates. Soit $x \in X$. On va tout d'abord exprimer le singleton $\{x\}$ comme une combinaison booléenne d'ensembles clos par le haut. En effet $\{x\} = x^{\uparrow} \smallsetminus \{y \in x^{\uparrow} \mid y > x\}$, donc

$$\{x\} = x^{\uparrow} \smallsetminus \bigcup_{y>x} y^{\uparrow},$$

et par conséquent

$$\varphi^{-1}(\{x\}) = \varphi^{-1}(x^{\uparrow}) \smallsetminus \bigcup_{y>x} \varphi^{-1}(y^{\uparrow}),$$

Or, d'après la propriété 4.5.15, tout langage de la forme $\varphi^{-1}(z^{\uparrow})$ est reconnu par l'automate $\mathcal{A}_{\varphi,\{z\}}$, donc $\varphi^{-1}\{x\}$ est une combinaison booléenne finie de langages reconnaissables par automates. $\square$

On a établi que l'ensemble des langages reconnaissables par prémorphisme adéquat était clos par union, intersection, soustraction et complément. On va prouver sur les bi-arbres qu'il n'est pas clos par produit.

Propriété 4.5.17. *La classe des langages de bi-arbres reconnaissables par prémorphisme adéquat n'est pas close par produit.*

Démonstration. On reprend le contre-exemple de la propriété 4.3.5 : soient les langages de bi-arbres

$$L = \{(\mathit{pref}(a^{2i}), a^{2i}) \in \mathit{FIM}(A) \mid i \in \mathbb{N}\},$$
$$\bar{L} = \{(\mathit{pref}(\bar{a}^{2i}), \bar{a}^{2i}) \in \mathit{FIM}(A) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Ces langages sont reconnaissables par automate, donc par prémorphisme adéquat.

Or, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, le langage $L \cdot \bar{L}$ contient le bi-arbre $(\mathit{pref}(a^{2i+2j}), a^2 i)$, i.e. la tuile $(1, a^{2i}, a^{2j})$, mais il ne contient pas le bi-arbre $(\mathit{pref}(a^{2i+2j+1}), a^2 i)$, i.e. la tuile $(1, a^{2i}, a^{2j+1})$. Le langage $L \cdot \bar{L}$ n'est donc pas une combinaison booléenne finie de langages clos par le haut, ce n'est donc pas une combinaison booléenne finie de langages reconnus par NFA. Le langage $L \cdot \bar{L}$ n'est donc pas reconnaissable par prémorphisme adéquat. $\square$

Enfin, on remarquera que ces propriétés sont parfaitement conservées lorsque l'on passe aux tuiles linéaires.

Théorème 4.5.18. *Soit un langage de tuiles linéaires L, les énoncés suivants son équivalents :*

i. *Le langage L est quasi-reconnaissable.*

ii. *Le langage L est une combinaison booléenne de langages de tuiles linéaires reconnus par NFA.*

iii. *Le langage de bi-arbres $f(L)$ est quasi-reconnaissable.*

Démonstration. Cette propriété est un conséquence directe du théorème 4.5.5 et de la propriété 4.4.3. □

Corollaire 4.5.19. *L'ensemble des langages quasi-reconnaissables de tuiles linéaires est clos par union, intersection et complément.*

Propriété 4.5.20. *L'ensemble des langages quasi-reconnaissables de tuiles linéaires n'est pas clos par produit.*

Démonstration. On renvoie au contre-exemple de la propriété 4.5.17. Puisque le produit des langages de bi-arbres $L = \{(\mathit{pref}(a^{2i}), a^{2i}) \in \mathit{FIM}(A) \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $\bar{L} = \{(\mathit{pref}(\bar{a}^{2i}), \bar{a}^{2i}) \in \mathit{FIM}(A) \mid i \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable par prémorphisme adéquat, le produit $f(L) \cdot f(\bar{L})$ ne l'est pas non plus. □

Chapitre 5

Produits de langages de tuiles

On s'intéresse dans ce chapitre au cas particulier des tuiles linéaires positives, dans lequel on peut s'affranchir des limites de la propriété 4.5.20, qui énonce que la classe des langages de tuiles linéaires quasi-reconnaissables n'est pas close par produit.

Ce chapitre est donc consacré à la preuve du théorème 5.3.5, qui énonce que l'ensemble des langages de tuiles linéaires positives quasi-reconnaissables est clos par produit. Plutôt que d'utiliser une méthode basée sur des automates et sur le théorème 4.5.18, qui nécessiterait une construction complexe prenant en compte de nombreux cas, on préfère une méthode algébrique basée sur le produit restreint. Pour cela, on développe un outil conceptuel original : le monoïde des décompositions restreintes.

5.1 Le monoïde des décompositions restreintes

On propose un outil, le monoïde des décompositions restreintes, permettant d'étudier le produit restreint de langages quasi reconnaissables. L'intuition est de remplacer chaque élément x par l'ensemble de ses décompositions, c'est à dire des paires d'éléments dont le produit restreint vaut x.

Définition 5.1.1 (Monoïde des décompositions restreintes)**.** Soit un E-monoïde M muni du préordre $\leq$, on définit $\mathcal{D}^r(M) \subseteq \mathcal{P}(M \times M)$ par

$$\mathcal{D}^r(M) = \{X \in \mathcal{P}(M \times M) \mid \exists c \in M,\ (c, c^L) \in X,\\ (c^R, c) \in X, \forall (x, y) \in X,\ x \bullet y = c\}.$$

L'opération $*$ sur $M \times M$ est définie pour tous $(x, x'), (y, y') \in M \times M$ par :

$$(x, x') * (y, y') = \{(x \cdot (x' \cdot y \cdot y')^R, x^L \cdot x' \cdot y \cdot y'), (x \cdot x' \cdot y \cdot y'^R, (x \cdot x' \cdot y)^L \cdot y')\}.$$

On étend alors le produit $*$ point à point à l'ensemble $\mathcal{P}(M \times M)$. Pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(M \times M)$,

$$X * Y = \bigcup_{\substack{(x_1,x_2)\in X \\ (y_1,y_2)\in Y}} (x_1, x_2) * (y_1, y_2).$$

Le préordre $\leq$ est étendu à $M \times M$ en définissant $(x, x') \leq (y, y')$ lorsque $x \leq y$ et $x' \leq y'$ pour tous $(x, x'), (y, y') \in M \times M$. Il est étendu à $\mathcal{P}(M \times M)$ en définissant $X \leq Y$ lorsque pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ tel que $x \leq y$ pour tous $X, Y \in \mathcal{D}^r(M)$.

On montre que ce monoïde est un E-monoïde.

Lemme 5.1.1. *L'opération $*$ sur $\mathcal{D}^r(M)$ est interne.*

Démonstration. Soient $X, X' \in \mathcal{D}^r(M)$. Par définition de $\mathcal{D}^r(M)$, il existe c, $c' \in M$ tels que :

- ▷ $(c, c^L), (c^R, c) \in X$,
- ▷ $(c', {c'}^L), ({c'}^R, c') \in X'$,
- ▷ pour tous $(x, y) \in X$, on a $x \bullet y = c$,
- ▷ pour tous $(x', y') \in X$, on a $x' \bullet y' = c'$.

On remarque que $X * X'$ contient $(c, c^L) * (c', {c'}^L)$, et

$$(c \cdot c^L \cdot c' \cdot ({c'}^L)^R, (c \cdot c^L \cdot c')^L \cdot {c'}^L) \in (c, c^L) * (c', {c'}^L).$$

Or $c \cdot c^L = c$ et, comme ${c'}^L \in E(M)$, on a $({c'}^L)^R = {c'}^L$, donc

$$\begin{aligned}
(c \cdot c^L \cdot c' \cdot ({c'}^L)^R, (c \cdot c^L \cdot c')^L \cdot {c'}^L) &= (c \cdot c' \cdot {c'}^L, (c \cdot c')^L \cdot {c'}^L) \\
&= (c \cdot c', (c \cdot c' \cdot {c'}^L)^L) \\
&= (c \cdot c', (c \cdot c')^L).
\end{aligned}$$

De même $X * X'$ contient $(c^R, c) * ({c'}^R, c')$, et

$$(c^R \cdot (c \cdot {c'}^R \cdot c')^R, (c^R)^L \cdot c \cdot {c'}^R \cdot c') \in (c^R, c) * ({c'}^R, c').$$

Or ${c'}^R \cdot c' = c'$ et, comme $c^R \in E(M)$, on a $(c^R)^L = c^R$, donc

$$\begin{aligned}
(c^R \cdot (c \cdot {c'}^R \cdot c')^R, (c^R)^L \cdot c \cdot {c'}^R \cdot c') &= (c^R \cdot (c \cdot c')^R, c^R \cdot c \cdot c') \\
&= ((c^R \cdot c \cdot c')^R, c \cdot c') \\
&= ((c \cdot c')^R, c \cdot c').
\end{aligned}$$

Donc $X * X'$ contient $((c \cdot c')^R, c \cdot c')$ et $(c \cdot c', (c \cdot c')^L)$.

De plus, soit $(u, v) \in X \cdot X'$, alors il existe $(x, y) \in X$, $(x', y') \in X'$ tel que $(u, v) \in (x, y) * (x', y')$.

▷ Si $(u,v) = (x \cdot (y \cdot x' \cdot y')^R, x^L \cdot y \cdot x' \cdot y')$, alors

$$\begin{aligned} u \cdot v &= x \cdot (y \cdot x' \cdot y')^R \cdot x^L \cdot y \cdot x' \cdot y' \\ &= x \cdot (y \cdot c')^R \cdot x^L \cdot y \cdot c' \\ &= x \cdot x^L \cdot (y \cdot c')^R \cdot y \cdot c' \\ &= x \cdot y \cdot c' \\ &= c \cdot c' \end{aligned}$$

De plus, $u^L = (x \cdot (y \cdot x' \cdot y')^R)^L = x^L \cdot (y \cdot x' \cdot y')^R = (x^L \cdot y \cdot x' \cdot y')^R = v^R$.

▷ Si $(u,v) = (x \cdot y \cdot x' \cdot y'^R, (x \cdot y \cdot x')^L \cdot y')$, alors

$$\begin{aligned} uv &= x \cdot y \cdot x' \cdot y'^R \cdot (x \cdot y \cdot x')^L \cdot y' \\ &= c \cdot x' \cdot y'^R \cdot (c \cdot x')^L \cdot y' \\ &= c \cdot x' \cdot (c \cdot x')^L \cdot y'^R \cdot y' \\ &= c \cdot x' \cdot y' \\ &= c \cdot c' \end{aligned}$$

De plus, $u^L = (x \cdot y \cdot x' \cdot y'^R)^L = (x \cdot y \cdot x')^L \cdot y'^R = ((x \cdot y \cdot x')^L \cdot y')^R = v^R$.

Dans les deux cas, $u \bullet v = c \cdot c'$. □

Lemme 5.1.2. *L'opération $*$ sur $\mathcal{D}^r(M)$ est associative.*

Démonstration. Soient $(u,u'),(v,v'),(w,w') \in M \times M$, on a alors :

$$\begin{aligned} ((u,u') * (v,v')) * \{(w,w')\} = \{&(u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R, u^L \cdot u' \cdot v \cdot v'), \\ &(u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R, (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v')\} \cdot \{(w,w')\} \end{aligned}$$

qui est de la forme $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, avec

$$\begin{aligned} p_1 &= (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot (u^L \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R, \\ &\qquad (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R)^L \cdot u^L \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w') \\ p_2 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R((u \cdot u' \cdot v)^L v' \cdot w \cdot w')^R, \\ &\qquad (u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R)^L (u \cdot u' \cdot v)^L v' \cdot w \cdot w') \\ p_3 &= (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u^L \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, \\ &\qquad (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u^L \cdot u' \cdot v' \cdot w)^L \cdot w') \\ p_4 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R \cdot (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, \\ &\qquad (u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R \cdot (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v' \cdot w)^L \cdot w') \end{aligned}$$

Par définition des projections, $u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \in U(M)$, par conséquent $u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R = (u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R)^L$, et comme M est un E-monoïde, par

(A4), $u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R = (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R)^L$. On a également de façon similaire $u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R = (u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R)^R$, et donc par (A4), $u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R = (u^L \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R$. Ainsi

$$\begin{aligned} p_1 &= (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R, \\ &\qquad u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u^L \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w') \\ p_2 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R \cdot (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot (v' \cdot w \cdot w')^R, \\ &\qquad (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v'^R \cdot (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v' \cdot w \cdot w') \end{aligned}$$

Comme on a d'une part $(u' \cdot v \cdot v')^R, u^L \in U(M)$, et d'autre part $v'^R, (u \cdot u' \cdot v)^L \in U(M)$, ils commutent, donc

$$\begin{aligned} p_1 &= (u \cdot u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R, \\ &\qquad u^L \cdot u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w') \\ p_2 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v'^R \cdot (v' \cdot w \cdot w')^R, \\ &\qquad (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v'^R \cdot v' \cdot w \cdot w') \\ p_3 &= (u \cdot u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, \\ &\qquad (u \cdot u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w)^L \cdot w') \\ p_4 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v'^R \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, \\ &\qquad (u \cdot u' \cdot v \cdot (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v'^R \cdot v' \cdot w)^L \cdot w') \end{aligned}$$

Par définition de la projection gauche, u^L et $(u \cdot u' \cdot v)^L$ sont idempotents, et on a $u \cdot u^L = u$ et $u \cdot u' \cdot v \cdot (u \cdot u' \cdot v)^L = u \cdot u' \cdot v$, donc

$$\begin{aligned} p_1 &= (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R, u^L \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w') \\ p_2 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R \cdot (v' \cdot w \cdot w')^R, (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v'^R \cdot v' \cdot w \cdot w') \\ p_3 &= (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w)^L \cdot w') \\ p_4 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, (u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R \cdot v' \cdot w)^L \cdot w') \end{aligned}$$

De la même manière, par définition de la projection droite, on a $(u' \cdot v \cdot v')^R \cdot u' \cdot v \cdot v' = u' \cdot v \cdot v'$ et $v'^R \cdot v' = v'$, donc

$$\begin{aligned} p_1 &= (u \cdot (u' \cdot v \cdot v')^R \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R, u^L \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w') \\ p_2 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot v'^R \cdot (v' \cdot w \cdot w')^R, (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v' \cdot w \cdot w') \\ p_3 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, (u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w)^L \cdot w') \\ p_4 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, (u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w)^L w') \end{aligned}$$

Comme $(w \cdot w')^R \in U(M)$, par définition de l'ordre naturel, on a $u' \cdot v \cdot v' \cdot (w \cdot w')^R \leq u' \cdot v \cdot v'$, et donc comme la projection droite préserve l'ordre on a $(u' \cdot v \cdot v' \cdot (w \cdot w')^R)^R \leq (u' \cdot v \cdot v')^R$. Et donc par (A4) on a $(u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R \leq (u' \cdot v \cdot v')^R$.

De façon similaire on montre que $(v' \cdot w \cdot w')^R \leq v'^R$, et on a donc $v'^R \cdot (v' \cdot w \cdot w')^R = v'^R \wedge (v' \cdot w \cdot w')^R = (v' \cdot w \cdot w')^R$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
p_1 &= (u \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R, u^L \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w') \\
p_2 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot (v' \cdot w \cdot w')^R, (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v' \cdot w \cdot w') \\
p_3 = p_4 &= (u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, (u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w)^L \cdot w')
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
((u,u') * (v,v')) * (w,w') = \{&(u \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R, u^L \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'), \\
&(u \cdot u' \cdot v \cdot (v' \cdot w \cdot w')^R, (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v' \cdot w \cdot w'), \\
&(u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, (u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w)^L \cdot w')\}
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&(u,u') * ((v,v') * (w,w')) = (u,u') * \\
&\quad \{(v \cdot (v' \cdot w \cdot w')^R, v^L \cdot v' \cdot w \cdot w'), (v \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, (v \cdot v' \cdot w)^L \cdot w')\}
\end{aligned}$$

Symétriquement, on montre que

$$\begin{aligned}
(u,u') * ((v,v') * (w,w')) &= \{(u \cdot (u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w')^R, u^L \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'), \\
&\quad (u \cdot u' \cdot v \cdot (v' \cdot w \cdot w')^R, (u \cdot u' \cdot v)^L \cdot v' \cdot w \cdot w'), \\
&\quad (u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w \cdot w'^R, (u \cdot u' \cdot v \cdot v' \cdot w)^L \cdot w')\} \\
&= ((u,u') * (v,v')) * (w,w')
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.1.3. *L'opération $*$ préserve le préordre sur $\mathcal{D}^r(M)$.*

Démonstration. Soient $X, Y, Z \in \mathcal{D}^r(M)$ avec $X \leq Y$. Pour tout $(u,v) \in X*Z$, il existe $(x_1,x_2) \in X$ et $(z_1,z_2) \in Z$, tels que $(u,v) \in (x_1,x_2) * (z_1,z_2)$, et par conséquent $(y_1,y_2) \in Y$ tel que $(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2)$.

▷ Si $(u,v) = (x_1(x_2 \cdot z_1 \cdot z_2)^R, x_1^L \cdot x_2 \cdot z_1 \cdot z_2)$, alors

$$(u,v) \leq (y_1 \cdot (y_2 \cdot z_1 \cdot z_2)^R, y_1^L \cdot y_2 \cdot z_1 \cdot z_2) \in (y_1,y_2) * (z_1,z_2) \subseteq Y * Z.$$

▷ Si $(u,v) = (x_1 \cdot x_2 \cdot z_1 \cdot z_2^R, (x_1 \cdot x_2 \cdot z_1)^L \cdot z_2)$, alors

$$(u,v) \leq (y_1 \cdot y_2 \cdot z_1 \cdot z_2^R, (y_1 \cdot y_2 \cdot z_1)^L \cdot z_2) \in (y_1,y_2) * (z_1,z_2) \subseteq Y * Z.$$

□

On déduit des trois lemmes précédents que :

Théorème 5.1.4. *$(\mathcal{D}^r(M), *)$ est un semigroupe préordonné par $\leq$.*

Démonstration. Ce théorème est une conséquence directe des lemmes 5.1.1, 5.1.2 et 5.1.3. □

Lemme 5.1.5. *L'opération $*$ sur $\mathcal{D}^r(M)$ possède une unité $1 = \{(1, 1)\}$.*

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{D}^r(M)$. Par définition de $\mathcal{D}^r(M)$, il existe $c \in M$ tel que pour tous $x, x' \in X$, $x \bullet x' = c$, et $(c^R, c), (c, c^L) \in X$.

Soit $(x, x') \in X$, alors

$$(x, x') * (1, 1) = \{(x \cdot x'^R, x^L \cdot x'), (x \cdot x', (x \cdot x')^L)\}$$

donc comme $\exists x \bullet x'$

$$\begin{aligned}(x, x') * (1, 1) &= \{(x \cdot x^L, x'^R \cdot x'), (x \cdot x', (x \cdot x')^L)\} \\ &= \{(x, x'), (x \cdot x', (x \cdot x')^L)\}\end{aligned}$$

et comme $x \bullet x' = c$

$$(x, x') * (1, 1) = \{(x, x'), (c, c^L)\} \tag{5.1}$$

donc $(x, x') * (1, 1) \subseteq X$. On a donc montré que $X * \{(1, 1)\} \subseteq X$. Inversement, on voit par l'équation 5.1 que $(x, x') \in X * \{(1, 1)\}$, donc $X \subseteq X * \{(1, 1)\}$. On a donc $X * 1 = X$, et on prouve symétriquement que $1 * X = X$. □

Théorème 5.1.6. *$(\mathcal{D}^r(M), *)$ est un monoïde préordonné.*

Démonstration. Ce théorème est une conséquence directe du théorème 5.1.4 et du lemme 5.1.5. □

On va maintenant démontrer que le monoïde $\mathcal{D}^r(M)$ vérifie les axiomes d'un E-monoïde, c.f. définition 4.2.1.

Lemme 5.1.7. *L'élément $\emptyset$ est minimum et absorbant dans $\mathcal{D}^r(M)$ muni de $*$, i.e. $\mathcal{D}^r(M)$ vérifie **A0**.*

Démonstration. Trivialement, pour tout $x \in \emptyset$, pour tout $y \in M$, $x \leq y$ et $x * y = \emptyset$. □

Définition 5.1.2. On nomme U l'ensemble $U(\mathcal{D}^r(M))$ des sous-unités de $\mathcal{D}^r(M)$.

Remarque. $U = \{X \in \mathcal{D}^r(M) \mid X \leq 1\} = \mathcal{D}^r(M) \cap \mathcal{P}(U(M) \times U(M))$.

Lemme 5.1.8. *Tous les éléments de U sont des singletons contenant un paire d'idempotents égaux.*

Démonstration. Soit $X \in U$. Par définition de $\mathcal{D}^r(M)$, il existe $c \in M$ tel que $(c^L, c), (c, c^R) \in X$, et pour tout $(x, y) \in X$, $x \bullet y = c$. Par définition de U, $X \leq 1$ donc $(c^L, c) \leq (1, 1)$, d'où $c = c^L = c^R$.

Soit $(x, y) \in X$, comme $(x, y) \leq (1, 1)$ et $x \bullet y = c$, on a $x^L = x$, $y^R = y$ et $x^L = y^R$. Alors $(x = y = c)$, i.e. $(x, y) = (c^L, c) = (c, c^R) = (c, c)$. Alors $X = \{(c, c)\}$. $\square$

Lemme 5.1.9. *$\leq$ est un ordre sur U.*

Démonstration. Comme $\leq$ est un préordre, il est réflexif et transitif.

Soit $X, Y \in U$ tel que $X \leq Y$ et $Y \leq X$. Par le lemme 5.1.8, il existe $x, y \in U(M)$ tel que $X = \{(x, x)\}$ et $Y = \{(y, y)\}$. Donc $(x, x) \leq (y, y)$ et $(y, y) \leq (x, x)$, i.e. $x \leq y$ et $y \leq x$. Par (A1) dans M, $x = y$, donc $X = Y$. $\square$

Lemme 5.1.10. *U est un $\wedge$-semitreillis idempotent commutatif avec $\wedge$ comme produit.*

Démonstration. Par le lemme 5.1.9, U est ordonné par $\leq$. Soit $X, Y \in U$, par le lemme 5.1.8, il existe $x, y \in U(M)$ tel que $X = \{(x, x)\}$ et $Y = \{(y, y)\}$.

Alors par (A1) sur M, il existe $z \in U(M)$ tel que $xy = x \wedge y = z$, i.e. $X * Y = \{(x, x)\} \wedge \{(y, y)\} = \{(z, z)\}$. Donc U est un $\wedge$-semitreillis avec $\wedge$ comme produit.

De plus $X * Y = Y * X = \{(z, z)\}$, donc U est commutatif.

Enfin, $X * X = (x, x) * (x, x) = \{(x, x \cdot x \cdot x), (x \cdot x \cdot x, x)\} = \{(x, x)\} = X$, donc U est idempotent. $\square$

Définition 5.1.3. Soit $X \in \mathcal{D}^r(M)$, on définit $\mathcal{R}(X) = \{Y \in U \mid Y * X = X\}$ et $\mathcal{L}(X) = \{Y \in U \mid X * Y = X\}$.

On définit de plus $X^R = \bigwedge_{Y \in \mathcal{R}(X)} Y$ et $X^L = \bigwedge_{Y \in \mathcal{L}(X)} Y$.

Lemme 5.1.11. *Soit $X \in \mathcal{D}^r(M)$, alors $X^R = min(\mathcal{R}(X))$ et $X^L = min(\mathcal{L}(X))$, i.e. $\mathcal{D}^r(M)$ vérifie **A2**.*

Démonstration. Comme $\mathcal{D}^r(M)$ vérifie **A1**, on a $X^R = Y_1 * \ldots * Y_{k-1} * Y_k$ avec $k = |\mathcal{R}(X)|$ et tous les $Y_i \in \mathcal{R}(X)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} X^R * X &= Y_1 * \ldots * Y_{k-1} * Y_k * X \\ &= Y_1 * \ldots * Y_{k-1} * X \\ &= \ldots \\ &= X \end{aligned}$$

Alors $X^R \in \mathcal{R}(X)$. De plus, par définition de X^R, pour tout $Y \in \mathcal{R}(X)$, on a $X^R \leq Y$. Par conséquent, $X^R = min(\mathcal{R}(X))$.

On montre de façon identique que $X^L = min(\mathcal{L}(X))$. $\square$

Lemme 5.1.12. *Soit $X \in \mathcal{D}^r(M)$, alors pour tout $(x,y) \in X$,*

$$X^R = \{(x^R, x^R)\} = \{((x \bullet y)^R, (x \bullet y)^R)\}$$
$$X^L = \{(y^L, y^L)\} = \{((x \bullet y)^L, (x \bullet y)^L)\}$$

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{D}^r(M)$. Par définition, il existe $c \in M$ tel que pour tous $(x,y) \in X$, $x \bullet y = c$ et $(c^R, c), (c, c^L) \in X$.

Premièrement, on va montrer que $\{(c^R, c^R)\} \in \mathcal{R}(X)$. Soit $(x,y) \in X$,

$$\begin{aligned}(c^R, c^R) * (x,y) &= \{(c^R \cdot c^R \cdot x \cdot y^R, (c^R \cdot c^R \cdot x)^L \cdot y),\\ &\qquad (c^R \cdot (c^R \cdot x \cdot y)^R, (c^R)^L \cdot c^R \cdot x \cdot y)\}\\ &= \{(c^R \cdot x \cdot x^L, (c^R \cdot x)^L \cdot y), (c^R \cdot (c^R \cdot c)^R, c^R \cdot c^R \cdot c)\}\\ &= \{(c^R \cdot x, (c^R \cdot x)^L \cdot y), (c^R \cdot c^R \cdot, c^R \cdot c)\}.\end{aligned}$$

Et $c^R \cdot x = (x \cdot y)^R \cdot x = (x \cdot y^R)^R \cdot x = (x \cdot x^L)^R \cdot x = x^R \cdot x = x$, donc

$$\begin{aligned}(c^R, c^R) * (x,y) &= \{(x, x^L \cdot y), (c^R, c)\}\\ &= \{(x, y^R \cdot y), (c^R, c)\}\\ &= \{(x,y), (c^R, c)\}.\end{aligned}$$

Donc pour tout $(x,y) \in X$, $(x,y) \in \{(c^R, c^R)\} * X$, et $\{(c^R, c^R)\} * (x,y) \subseteq X$, i.e. $\{(c^R, c^R)\} * X = X$.

On montre maintenant que $\{(c^R, c^R)\}$ est minimal dans $\mathcal{R}(X)$. Soit $(x,x) \in \mathcal{R}(X)$.

$$\begin{aligned}\{(x,x)\} * \{(c^R, c^R)\} &= \{(x \cdot (x \cdot c^R \cdot c^R)^R, x^L \cdot x \cdot c^R \cdot c^R),\\ &\qquad (x \cdot x \cdot c^R \cdot (c^R)^R, (x \cdot x \cdot c^R)^L \cdot c^R)\}\\ &= \{(x \cdot c^R, x \cdot c^R)\}.\end{aligned}$$

Alors comme $(c^R, c) \in X$, on a $(x,x) * (c^R, c) \subseteq X$, et on a donc $(x \cdot x \cdot c^R \cdot c^R, (x \cdot x \cdot c^R)^L \cdot c) \in X$.

$(x \cdot x \cdot c^R \cdot c^R, (x \cdot x \cdot c^R)^L \cdot c) = (x \cdot c^R, (x \cdot c^R)^L \cdot c) = (x \cdot c^R, x \cdot c^R \cdot c)$, donc $(x \cdot c^R, x \cdot c^R \cdot c) \in X$. Alors $x \cdot c^R \bullet x \cdot c^R \cdot c = c$ donc $x \cdot c = c$. Alors par définition, $c^R \leq x$, donc $x \cdot c^R = c^R$, donc

$$\{(x,x)\} * \{(c^R, c^R)\} = \{(c^R, c^R)\}.$$

Alors par (A1), $\{(c^R, c^R)\} \leq \{(x,x)\}$.

On a maintenant $\{(c^R, c^R)\} = min(\mathcal{R}(X)) = X^R$. Enfin, on montre que c peut être l'élément de gauche de toute paire de X. Soit la paire $(x,y) \in X$, $(x \cdot y)^R = (x \cdot y^R)^R = (x \cdot x^L)^R = x^R$, et comme $x \bullet y = c$, on a $(x \cdot y)^R = c^R$, d'où $c^R = x^R$. Ainsi $X^R = \{(x^R, x^R)\} = \{(c^R, c^R)\} = \{((x \bullet y)^R, (x \bullet y)^R)\}$.

De plus, on montre symétriquement que pour tout $(x,y) \in X$, on a $X^L = \{(y^L, y^L)\} = \{(c^L, c^L)\} = \{((x \bullet y)^L, (x \bullet y)^L)$. □

Lemme 5.1.13. *Soit $X, Y \in \mathcal{D}^r(M)$ tel que $X \leq Y$, alors $X^R \leq Y^R$ et $X^L \leq Y^L$, i.e. $\mathcal{D}^r(M)$ vérifie **A3**.*

Démonstration. Soit $X, Y \in \mathcal{D}^r(M)$ tel que $X \leq Y$, et soit $(x_1, x_2) \in X$. Alors il existe $(y_1, y_2) \in Y$ tel que $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$, i.e. $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$. Par le lemme 5.1.12,

$$X^R = \{(x_1^R, x_1^R)\}, X^L = \{(x_2^L, x_2^L)\}, Y^R = \{(y_1^R, y_1^R)\}, Y^L = \{(y_2^L, y_2^L)\}.$$

Par conséquent, $X^R \leq Y^R$ et $X^L \leq Y^L$. □

Lemme 5.1.14. *Soient $X, Y \in \mathcal{D}^r(M)$, alors $(X * Y)^R = (X * Y^R)^R$ et $(X * Y)^L = (X^L * Y)^L$, i.e. $\mathcal{D}^r(M)$ vérifie **A4**.*

Démonstration. Soient $X, Y \in \mathcal{D}^r(M)$, et $(z, z') \in X * Y$. Donc il existe $(x, x') \in X$ et $(y, y') \in Y$ tels que $(z, z') \in (x, x') * (y, y')$. Alors

$$(z, z') = ((x \cdot (x' \cdot y \cdot y')^R, x^L \cdot (x' \cdot y \cdot y'))$$
$$\text{ou}$$
$$(z, z') = ((x \cdot x' \cdot y) \cdot y'^R, (x \cdot x' \cdot y)^L \cdot y').$$

Donc,

$$z = x \cdot (x' \cdot (y \cdot y')^R)^R = x \cdot (x' \cdot (y \cdot y'^R)^R)^R = x \cdot (x' \cdot (y \cdot y^L)^R)^R = x \cdot (x' \cdot y^R)^R$$
$$\text{ou}$$
$$z = x \cdot x' \cdot y \cdot y'^R = x \cdot x' \cdot y \cdot y^L = x \cdot x' \cdot y.$$

Donc on a

$$(z^R, z^R) = ((x \cdot (x' \cdot y^R)^R)^R, (x \cdot (x' \cdot y^R)^R)^R) \tag{5.2}$$
$$\text{ou}$$
$$(z^R, z^R) = ((x \cdot x' \cdot y)^R, (x \cdot x' \cdot y)^R). \tag{5.3}$$

Comme $(x, x') * (y^R, y^R) \subseteq X * Y^R$ et

$$\begin{aligned}(x, x') * (y^R, y^R) &= \{(x \cdot (x' \cdot y^R \cdot y^R)^R, x^L \cdot x' \cdot y^R \cdot y^R), \\ &\qquad ((x \cdot x' \cdot y^R) \cdot (y^R)^R, (x \cdot x' \cdot y^R)^L \cdot y^R)\} \\ &= \{(x \cdot (x' \cdot y^R)^R, x^L \cdot x' \cdot y^R), (x \cdot x' \cdot y^R, (x \cdot x' \cdot y^R)^L \cdot y^R)\}\end{aligned}$$

on a

$$((x \cdot (x' \cdot y^R)^R)^R, (x \cdot (x' \cdot y^R)^R)^R) \in (X * Y^R)^R \tag{5.4}$$
$$\text{et}$$
$$((x \cdot x' \cdot y^R)^R, (x \cdot x' \cdot y^R)^R) \in (X * Y^R)^R. \tag{5.5}$$

Ainsi par (5.2) et (5.4) d'une part, et par (5.3) et (5.5) d'autre part, on note que $(z^R, z^R) \in (X * Y^R)^R$.

Pour tout $(z, z') \in X * Y$, on a alors $(z^R, z^R) \in (X * Y^R)^R$. On a donc $(X * Y)^R \subseteq (X * Y^R)^R$.

Inversement, on montre que $(X * Y^R)^R \subseteq (X * Y)^R$ de manière similaire : tout élément de $(X * Y^R)^R$ est de la forme $((x \cdot (x' \cdot y^R)^R)^R, (x \cdot (x' \cdot y^R)^R)^R)$ ou $((x \cdot x' \cdot y^R)^R, (x \cdot x' \cdot y^R)^R)$ avec $(x, x') \in X$ et $(y, y') \in Y$.

Comme $X * Y$ contient les éléments $((x \cdot (x' \cdot y \cdot y')^R, x^L \cdot (x' \cdot y \cdot y'))$ et $((x \cdot x' \cdot y) \cdot y'^R, (x \cdot x' \cdot y)^L \cdot y')$, alors $(X * Y)^R$ contient les éléments $((x \cdot (x' \cdot y^R)^R)^R, (x \cdot (x' \cdot y^R)^R)^R)$ et $((x \cdot x' \cdot y^R)^R, (x \cdot x' \cdot y^R)^R)$.

Par conséquent, $(X * Y^R)^R = (X * Y)^R$.

□

Théorème 5.1.15. *Soit un E-monoïde M, le monoïde des décompositions restreintes $\mathcal{D}^r(M)$ est un E-monoïde préordonné.*

Démonstration. Les lemmes 5.1.7, 5.1.10, 5.1.11, 5.1.13 et 5.1.14 montrent que $\mathcal{D}^r(M)$ vérifie les propriétés (A0) à (A4) de la définition des E-monoïdes. □

5.2 Quasi-reconnaissabilité et monoïde des décompositions restreintes

Nous allons maintenant démontrer que tout langage quasi-reconnaissable par un E-monoide M est reconnaissable par le monoïde des décompositions restreintes $\mathcal{D}^r(M)$ construit à partir de M. Ce résultat sera utilisé dans la section suivante pour démontrer nos résultats de clôture par produits.

Soit désormais $L \subseteq \mathcal{T}_0^+(A)$ un langage reconnu par un prémorphisme adéquat $\varphi : \mathcal{T}_0^+(A) \longrightarrow M$ dans le E-monoïde M. On construit à partir de φ un prémorphisme adéquat de $\mathcal{T}_0^+(A)$ dans $\mathcal{D}^r(M)$ qui reconnaît toujours L.

Pour cela, on définit $\psi : \mathcal{T}_0^+(A) \to \mathcal{D}^r(M)$ pour chaque $u \in \mathcal{T}_0^+(A)$ par $\psi(u) = \{(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \mid u = \exists u_1 \bullet u_2\}$.

On va montrer que ψ possède toutes les caractéristiques d'un prémorphisme adéquat.

Tout d'abord, il apparaît que ψ reconnaît L, c'est-à-dire $L = \psi^{-1}(\psi(L))$.

En effet, par définition, $L \subseteq \psi^{-1}(\psi(L))$. Inversement, on montre que $\psi^{-1}(\psi(L)) \subseteq L$. Pour toute tuile $u \in \mathcal{T}_0^+(A)$, le seul produit de la forme $w \bullet w^L = u$ est lorsque $w = u$. Par conséquent le seul élément de la forme $(x, x^L) \in \psi(u)$ est $(\varphi(u), \varphi(u)^L)$. Donc, soit $v \in \psi^{-1}(\psi(u))$ avec $u \in L$, $(\varphi(u), \varphi(u)^L) = (\varphi(v), \varphi(v)^L)$, donc $\varphi(u) = \varphi(v)$. Comme φ reconnaît L, on a $v \in L$.

Lemme 5.2.1. *L'application ψ préserve l'ordre.*

Démonstration. Soient $u, u' \in \mathcal{T}_0^+(A)$ avec $u \leq u'$.

Pour tout $(x, y) \in \psi(u)$, il existe une décomposition restreinte $u_1 \bullet u_2 = u$ telle que $(x, y) = (\varphi(u_1), \varphi(u_2))$. Donc il existe une décomposition restreinte $u'_1 \bullet u'_2 = u'$ telle que $(u_1, u_2) \leq (u'_1, u'_2)$. On a donc

$$(x, y) = (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \leq (\varphi(u'_1), \varphi(u'_2)) \in \psi(u').$$

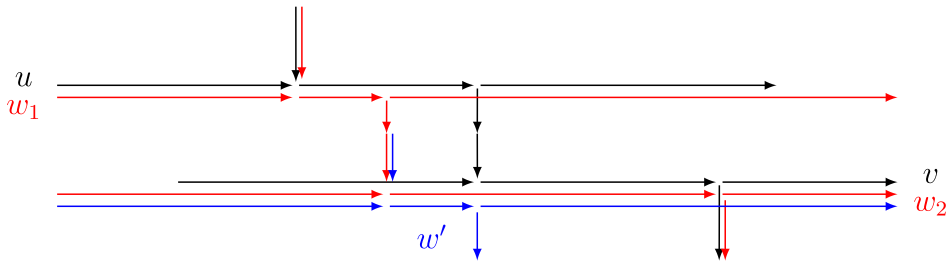
Donc $\psi(u) \leq \psi(u')$. □

Lemme 5.2.2. *L'application ψ est sous-multiplicative, i.e. pour tous $u, v \in \mathcal{T}_0^+(A)$, $\psi(u \cdot v) = \psi(u) \cdot \psi(v)$.*

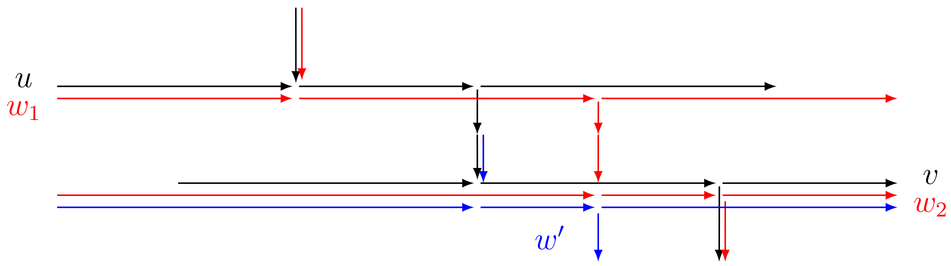
Démonstration. Soit $(x, y) \in \psi(u \cdot v)$, avec $w_1 \bullet w_2 = u \cdot v$ et $(x, y) = (\varphi(w_1), \varphi(w_2))$.

Donc il existe $w' \in \mathcal{T}_0^+(A)$ tel que

▷ si $w_1 \bullet w' = uv^R$ et $w' \bullet u^L v = w_2$,



▷ sinon $w_1 = uv^R \bullet w'$ et $w' \bullet w_2 = u^L v$.



Alors dans le premier cas, on a

$$\begin{aligned}(x, y) = (\varphi(w_1), \varphi(w' \bullet u^L v)) &= (\varphi(w_1), \varphi(w') \cdot \varphi(u^L \cdot v)) \\ \leq (\varphi(w_1), \varphi(w') \cdot \varphi(v)) &= (\varphi(w_1), \varphi(w') \cdot \varphi(v \bullet v^L)) \\ &= (\varphi(w_1), \varphi(w') \cdot \varphi(v) \cdot \varphi(v^L)).\end{aligned}$$

On remarque que $(\varphi(w_1), \varphi(w') \cdot \varphi(v) \cdot \varphi(v^L)) \in (\varphi(w_1), \varphi(w')) * (\varphi(v), \varphi(v^L))$. Par conséquent, comme $w_1 \bullet w' = u \cdot v^R$ et $v = v \cdot v^L$, on a alors $(\varphi(w_1), \varphi(w') \cdot \varphi(v) \cdot \varphi(v^L)) \in \psi(u \cdot v^R) * \psi(v)$. Donc $\psi(u \cdot v) \leq \psi(u \cdot v^R) * \psi(v)$.

Et, comme $*$ et l'application ψ préservent le préordre $\leq$, et $u \cdot v^R \leq u$, on a $\psi(u \cdot v^R) * \psi(v) \leq \psi(u) * \psi(v)$. Donc $\psi(u \cdot v) \leq \psi(u) * \psi(v)$.

Similairement, dans le second cas, on a

$$\begin{aligned}(x, y) = (\varphi(u \cdot v^R \bullet w'), \varphi(w_2)) &= (\varphi(u \cdot v^R) \cdot \varphi(w'), \varphi(w_2)) \\ \leq (\varphi(u) \cdot \varphi(w'), \varphi(w_2)) &= (\varphi(u^R \bullet u) \cdot \varphi(w'), \varphi(w_2)) \\ &= (\varphi(u^R) \cdot \varphi(u) \cdot \varphi(w'), \varphi(w_2)).\end{aligned}$$

On remarque que $(\varphi(u^R) \cdot \varphi(u) \cdot \varphi(w'), \varphi(w_2)) \in (\varphi(u^R), \varphi(u)) * (\varphi(w'), \varphi(w_2))$. Par conséquent, comme $u^R \bullet u = u$ et $w' \bullet w_2 = u^L v$, on a alors $(\varphi(u^R) \cdot \varphi(u) \cdot \varphi(w'), \varphi(w_2)) \in \psi(u) * \psi(u^L \cdot v)$. Donc $\psi(u \cdot v) \leq \psi(u) * \psi(u^L \cdot v)$.

Et, comme $*$ et l'application ψ préservent le préordre $\leq$, et $u^L \cdot v \leq v$, on a $\psi(u) * \psi(u^L \cdot v) \leq \psi(u) * \psi(v)$. Donc $\psi(u \cdot v) \leq \psi(u) * \psi(v)$. ☐

Enfin, comme $\psi(1) = \{(1, 1)\}$, on remarque que :

Corollaire 5.2.3. *L'application ψ est un prémorphisme de monoïde.*

On va maintenant montrer que ψ est adéquat.

Lemme 5.2.4. *L'application ψ préserve les projections : pour toute tuile linéaire $u \in \mathcal{T}_0^+(A)$, on a $\psi(u^R) = \psi(u)^R$ et $\psi(u^L) = \psi(u)^L$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{T}_0^+(A)$. Comme u^R possède une seule décomposition restreinte $u^R = u^R \bullet u^R$, on a $\psi(u^R) = \{(\varphi(u^R), \varphi(u^R))\}$. On montre d'abord que $\psi(u^R) * \psi(u) = \psi(u)$.

Soit $(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \psi(u)$, avec $u_1 \bullet u_2 = u$. Comme $u^R \bullet u = u$, on a $u^R \bullet u_1 \bullet u_2 = u$, donc $(u^R)^L = u_1^R$, donc $u^R = u_1^R$, donc $u^R \bullet u_1 = u_1$.

$(\varphi(u^R), \varphi(u^R)) * (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) = \{x, y\}$, avec

$$\begin{aligned}x &= (\varphi(u^R) \cdot \varphi(u^R) \cdot \varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2)^R, (\varphi(u^R) \cdot \varphi(u^R) \cdot \varphi(u_1))^L \cdot \varphi(u_2)) \\ &= (\varphi(u^R) \cdot \varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2)^R, (\varphi(u^R) \cdot \varphi(u_1))^L \cdot \varphi(u_2)) \\ &= (\varphi(u^R \bullet u_1) \cdot \varphi(u_2)^R, (\varphi(u^R \bullet u_1))^L \cdot \varphi(u_2)) \\ &= (\varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2)^R, \varphi(u_1)^L \cdot \varphi(u_2)) \\ &= (\varphi(u_1) \cdot \varphi(u_1)^L, \varphi(u_2)^R \cdot \varphi(u_2)) \\ &= (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \psi(u)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y &= (\varphi(u^R)\cdot(\varphi(u^R)\cdot\varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2))^R, \varphi(u^R)^L\cdot\varphi(u^R)\cdot\varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2))\\
&= (\varphi(u^R)\cdot(\varphi(u^R\bullet u_1)\cdot\varphi(u_2))^R, \varphi(u^R)^L\cdot\varphi(u^R\bullet u_1)\cdot\varphi(u_2))\\
&= (\varphi(u^R)\cdot(\varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2))^R, \varphi(u^R)^L\cdot\varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2))\\
&= (\varphi(u^R)\cdot(\varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2))^R, \varphi(u^R)\cdot\varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2))\\
&= (\varphi(u^R)\cdot(\varphi(u_1\bullet u_2))^R, \varphi(u^R)\cdot\varphi(u_1\bullet u_2))\\
&= (\varphi(u^R)\cdot\varphi(u)^R, \varphi(u^R)\cdot\varphi(u))\\
&= (\varphi(u^R), \varphi(u))\in\psi(u)
\end{aligned}$$

Donc $(\varphi(u^R),\varphi(u^R)) * (\varphi(u_1),\varphi(u_2)) \subseteq \psi(u)$, i.e. $\psi(u^R)\in\mathcal{R}(\psi(u))$.

On montre maintenant que $\psi(u^R)$ est minimal. Soit $\{(x,x)\}\in\mathcal{R}(\psi(u))$. Comme $(\varphi(u^R),\varphi(u))\in\psi(u)$, on a $(x,x)*(\varphi(u^R),\varphi(u))\subseteq p(u)$. On a alors $(x\cdot x\cdot\varphi(u^R)\cdot\varphi(u)^R, (x\cdot x\cdot\varphi(u^R))^L\cdot\varphi(u))\in\psi(u)$, par conséquent $(x\cdot\varphi(u)^R, x\cdot\varphi(u^R)\cdot\varphi(u))\in\psi(u)$, donc $(x\cdot\varphi(u)^R, x\cdot\varphi(u))\in\psi(u)$.

Par définition de $\mathcal{D}^r(M)$ et comme $(\varphi(u^R),\varphi(u))\in\psi(u)$, on a

$$x\cdot\varphi(u^R)\cdot x\cdot\varphi(u) = \varphi(u^R)\cdot\varphi(u) = \varphi(u),$$

donc $x\cdot\varphi(u)=\varphi(u)$. Donc par définition de $\varphi(u)^R$, $x\le\varphi(u)^R=\varphi(u^R)$.

Alors $\{(x,x)\}\le\{(\varphi(u^R),\varphi(u^R))\}=\psi(u^R)$ □

Lemme 5.2.5. *L'application ψ préserve le produit restreint : pour toutes tuiles $u,v\in\mathcal{T}_0^+(A)$, si $\exists u\bullet v$, alors $\psi(u\bullet v)=\psi(u)*\psi(v)$.*

Démonstration. Soient $u,v\in\mathcal{T}_0^+(A)$, tels que $\exists u\bullet v$.

D'une part, on va démontrer que $\psi(u\bullet v)\subseteq\psi(u)*\psi(v)$. Soit $(x,y)\in\psi(u\bullet v)$, alors il existe $w_1,w_2\in\mathcal{T}_0^+(A)$ tels que $\exists w_1\bullet w_2=u\bullet v$ et $(x,y)=(\varphi(w_1),\varphi(w_2))$.

Donc il existe un $w'\in\mathcal{T}_0^+(A)$ tel que

$$\exists w_1\bullet w'=u, \exists w'\bullet v=w_2 \text{ or } \exists u\bullet w'=w_1, \exists w'\bullet w_2=v.$$

Si $w_1\bullet w'=u, w'\bullet v=w_2$, alors $\exists w_1\bullet w'\bullet v$, et

$$\begin{aligned}
(x,y) &= (\varphi(w_1),\varphi(w'\bullet v))\\
&= (\varphi(w_1),\varphi(w')\cdot\varphi(v))\\
&= (\varphi(w_1)\cdot\varphi(w_1)^L, \varphi(w')^R\cdot\varphi(w')\cdot\varphi(v)\cdot\varphi(v)^L)\\
&= (\varphi(w_1)\cdot\varphi(w'\bullet v)^R, \varphi(w_1)^L\cdot\varphi(w')\cdot\varphi(v)\cdot\varphi(v)^L)\\
&= (\varphi(w_1)\cdot\varphi(w'\bullet v\bullet v^L)^R, \varphi(w_1)^L\cdot\varphi(w')\cdot\varphi(v)\cdot\varphi(v)^L)\\
&= (\varphi(w_1)\cdot(\varphi(w')\cdot\varphi(v)\cdot\varphi(v)^L)^R, \varphi(w_1)^L\cdot\varphi(w')\cdot\varphi(v)\cdot\varphi(v)^L).
\end{aligned}$$

Donc $(x, y) \in (\varphi(w_1), \varphi(w')) * (\varphi(v), \varphi(v^L)) \subseteq \psi(u) * \psi(v)$.

Si $u \bullet w' = w_1, w' \bullet w_2 = v$, alors $\exists u \bullet w' \bullet w_2$, et

$$\begin{aligned}(x, y) &= (\varphi(u \bullet w'), \varphi(w_2))\\ &= (\varphi(u) \cdot \varphi(w'), \varphi(w_2)^R \cdot \varphi(w_2))\\ &= (\varphi(u)^R \cdot \varphi(u) \cdot \varphi(w') \cdot \varphi(w')^L, \varphi(u \bullet w')^L \cdot \varphi(w_2))\\ &= (\varphi(u)^R \cdot \varphi(u) \cdot \varphi(w') \cdot \varphi(w_2)^R, \varphi(u^R \bullet u \bullet w')^L \cdot \varphi(w_2))\\ &= (\varphi(u)^R \cdot \varphi(u) \cdot \varphi(w') \cdot \varphi(w_2)^R, (\varphi(u)^R \cdot \varphi(u) \cdot \varphi(w'))^L \cdot \varphi(w_2))\end{aligned}$$

Donc $(x, y) \in (\varphi(u^R), \varphi(u)) * (\varphi(w'), \varphi(w_2)) \subseteq \psi(u) * \psi(v)$.

D'autre part, on va démontrer que $\psi(u) * \psi(v) \subseteq \psi(u \bullet v)$. Soit $(x, y) \in \psi(u) * \psi(v)$, alors il existe $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{T}_0^+(A)$ tel que

$$\begin{gathered}(x, y) \in (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) * (\varphi(v_1), \varphi(v_2)),\\ u_1 \bullet u_2 = u,\\ v_1 \bullet v_2 = v.\end{gathered}$$

Si $(x, y) = (\varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) \cdot \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2)^R, (\varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) \cdot \varphi(v_1))^L \cdot \varphi(v_2))$ alors, comme $\exists u_1 \bullet u_2 \bullet v_1 \bullet v_2$ et φ est adéquat, on a

$$\begin{aligned}(x, y) &= (\varphi(u_1 \bullet u_2 \bullet v_1) \cdot \varphi(v_2)^R, \varphi(u_1 \bullet u_2 \bullet v_1)^L \cdot \varphi(v_2))\\ &= (\varphi(u \bullet v_1) \cdot \varphi(v_2)^R, \varphi(u \bullet v_1)^L \cdot \varphi(v_2)),\end{aligned}$$

et comme le produit est restreint, on a $\varphi(u \bullet v_1)^L = \varphi(v_2)^R$, donc

$$(x, y) = (\varphi(u \cdot v_1) \cdot \varphi(u \cdot v_1)^L, \varphi(v_2)^R \cdot \varphi(v_2)) = (\varphi(u \cdot v_1), \varphi(v_2)).$$

Et comme $u \cdot v_1 \bullet v_2 = u \bullet v$, on a $(x, y) \in \psi(u \bullet v)$.

Sinon $(x, y) = (\varphi(u_1) \cdot (\varphi(u_2) \cdot \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2))^R, \varphi(u_1)^L \cdot \varphi(u_2) \cdot \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2))$, donc, comme $\exists u_1 \bullet u_2 \bullet v_1 \bullet v_2$ et φ est adéquat, on a

$$\begin{aligned}(x, y) &= (\varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2 \bullet v_1 \bullet v_2)^R, \varphi(u_1)^L \cdot \varphi(u_2 \bullet v_1 \bullet v_2))\\ &= (\varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2 \bullet v)^R, \varphi(u_1)^L \cdot \varphi(u_2 \bullet v))\end{aligned}$$

and comme le produit est restreint, on a $\varphi(u_1)^L = \varphi(u_2 \bullet v)^R$, donc

$$(x, y) = (\varphi(u_1) \cdot \varphi(u_1)^L, \varphi(u_2 \cdot v)^R \cdot \varphi(u_2 \cdot v)) = (\varphi(u_1), \varphi(u_2 \cdot v))$$

Et comme $u_1 \bullet u_2 \cdot v = u \bullet v$, on a $(x, y) \in \psi(u \bullet v)$.

Donc $\psi(u \bullet v) = \psi(u) * \psi(v)$.

Enfin, on va démontrer que $\exists \psi(u) \bullet \psi(v)$. Soit $u \cdot v \cdot v \in \mathcal{T}_0^+(A)$ tel que $\exists u \bullet v$.

$$\psi(u)^L = \psi(u^L) = \{(\varphi(u^L), \varphi(u^L))\},$$
$$\psi(v)^R = \psi(v^R) = \{(\varphi(v^R), \varphi(v^R))\}.$$

Comme φ est adéquat et $\exists u \bullet v$, on a $\varphi(u^L) = \varphi(u)^L = \varphi(v)^R = \varphi(v^R)$, d'où $\psi(u)^L = \psi(v)^R$, i.e. $\psi(u \bullet v) = \psi(u) \bullet \psi(v)$. □

D'après le lemme 5.2.4 ci-dessus et le fait que ψ préserve clairement le produit disjoint, on déduit que

Théorème 5.2.6. *L'application $\psi : \mathcal{T}_0^+(A) \to \mathcal{D}^r(M)$ est un prémorphisme adéquat qui reconnaît L.*

Démonstration. Ce théorème est une conséquence directe du corollaire 5.2.3 et des lemmes 5.2.4 et 5.2.5. □

5.3 Application aux produits de langages

Dans la section qui précédente, pour tout prémorphisme adéquat $\varphi : \mathcal{T}_0^+(A) \to M$, on a défini $\psi : \mathcal{T}_0^+(A) \to \mathcal{D}^r(M)$ qui calcule φ sur les deux composantes de toute décomposition restreinte d'une tuile positive. Dans un certain sens, pour toute tuile positive u, quand u est vue comme une structure du premier ordre avec des arrêtes étiquetées par A, cette construction permet de simuler n'importe quel quantificateur existentiel du premier ordre sur les sommets de l'entrée à la sortie.

Cette intuition est utilisée pour prouver notre théorème principal :

Théorème 5.3.1. *Soient $L_1, L_2 \subseteq \mathcal{T}_0^+(A)$ deux langages quasi-reconnaissables, le langage $L_1 \bullet L_2$ est quasi-reconnaissable.*

Démonstration. Soient M_1, M_2 deux E-monoïdes et $L_1, L_2 \subseteq \mathcal{T}_0^+(A)$ reconnus respectivement par les prémorphismes adéquats $\varphi_1 : \mathcal{T}_0^+(A) \longrightarrow M_1$ et $\varphi_2 : \mathcal{T}_0^+(A) \longrightarrow M_2$. Premièrement, on définit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{T}_0^+(A) &\longrightarrow M_1 \times M_2 \\ u &\longrightarrow (\varphi_1(u), \varphi_2(u)) \end{aligned}$$

On remarque que $M_1 \times M_2$ est un E-monoïde et φ est un prémorphisme adéquat ; on pourra se référer à la preuve de la propriété 4.2.2, qui contient la même construction. Le prémorphisme φ reconnaît à la fois L_1 et L_2, puisque $L_1 = \varphi^{-1}(\varphi_1(L_1) \times M_2)$ et $L_2 = \varphi^{-1}(M_1 \times \varphi_2(L_2))$.

On considère maintenant le prémorphisme $\psi : \mathcal{T}_0^+(A) \to \mathcal{D}^r(M_1 \times M_2)$ tel que défini dans la section précédente à partir du prémorphisme φ, par $\psi(u) = \{(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \mid u = \exists u_1 \bullet u_2\}$.

D'après les théorèmes 5.1.15 et 5.2.6, le monoïde $\mathcal{D}^r(M_1 \times M_2)$ est un E-monoïde, et l'application ψ est un prémorphisme adéquat. On va maintenant montrer que ψ reconnaît $L_1 \bullet L_2$.

Soient $u_1 \in L_1$ et $u_2 \in L_2$ tels que $\exists u_1 \bullet u_2$, et soit $v \in \mathcal{T}_0^+(A)$ tel que $\psi(v) = \psi(u_1 \bullet u_2)$. Donc on a $(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \psi(v)$, par conséquent il existe $v_1, v_2 \in \mathcal{T}_0^+(A)$ tel que $v_1 \bullet v_2 = v$ et

$$(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) = (\varphi(v_1), \varphi(v_2)).$$

Comme φ reconnaît L_1 et L_2, on a $v_1 \in L_1$ et $v_2 \in L_2$. Par conséquent, $v = v_1 \bullet v_2 \in L_1 \bullet L_2$. $\square$

On va maintenant appliquer le cas du produit restreint au cas du produit générique.

Lemme 5.3.2. *Soient deux langages quasi-reconnaissables $L_1, L_2 \subseteq \mathcal{T}_0^+(A)$.*

$$\begin{aligned} L_1 \cdot L_2 = \Big((A^*)^L \cdot L_1 \cdot (A^*)^R \bullet L_2\Big) &\cup \Big(L_1 \bullet (A^*)^L \cdot L_2 \cdot (A^*)^R\Big) \\ &\cup \Big((A^*)^L \cdot L_1 \bullet L_2 \cdot (A^*)^R\Big) \cup \Big(L_1 \cdot (A^*)^R \bullet (A^*)^L \cdot L_2\Big) \end{aligned}$$

Démonstration. On rappelle que l'on considère le produit $\cdot$ comme un opérateur prioritaire sur $\bullet$, c'est à dire qu'on note $x \cdot y \bullet z$ pour $(x \cdot y) \bullet z$

Montrons d'abord l'inclusion directe ($\subseteq$).

Soient $u = (u_1, u_2, u_3) \in L_1$ et $v = (v_1, v_2, v_3) \in L_2$, tels que $uv \neq 0$. Par définition du produit, on a quatre possibilités :

Si v_1 est un suffixe de u_1u_2 et u_3 est un préfixe de v_2v_3, alors $wv_1 = u_1u_2$ pour un $w \in A^*$ et $u_3w' = v_2v_3$ pour un $w' \in A^*$. On a par conséquent $u \cdot v = (u_1, u_2, u_3w') \bullet (wv_1, v_2, v_3)$ qui appartient donc à $L_1 \cdot (A^*)^R \bullet (A^*)^L \cdot L_2$.

Si u_1u_2 est un suffixe de v_1 et u_3 est un préfixe de v_2v_3, alors $wu_1u_2 = v_1$ pour un $w \in A^*$ et $u_3w' = v_2v_3$ pour un $w' \in A^*$. On a par conséquent $u \cdot v = (wu_1, u_2, u_3w') \bullet (v_1, v_2, v_3)$ qui appartient donc à $(A^*)^L \cdot L_1 \cdot (A^*)^R \bullet L_2$.

Si v_1 est un suffixe de u_1u_2 et v_2v_3 est un préfixe de u_3, alors $wv_1 = u_1u_2$ pour un $w \in A^*$ et $v_2v_3w' = u_3$ pour un $w' \in A^*$. On a par conséquent $u \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \bullet (wv_1, v_2, v_3w')$ qui appartient donc à $L_1 \bullet (A^*)^L \cdot L_2 \cdot (A^*)^R$.

Si u_1u_2 est un suffixe de v_1 et v_2v_3 est un préfixe de u_3, alors $wu_1u_2 = v_1$ pour un $w \in A^*$ et $v_2v_3w' = u_3$ pour un $w' \in A^*$. On a par conséquent

$u \cdot v = (wu_1, u_2, u_3) \bullet (v_1, v_2, v_3w')$ qui appartient donc à $L_1 \bullet (A^*)^L \cdot L_2 \cdot A^*)^R$.

Montrons maintenant l'inclusion inverse ($\supseteq$).
Soient $u = (u_1, u_2, u_3) \in L_1$ et $v = (v_1, v_2, v_3) \in L_2$, et soient $w, w' \in A^*$. Si $\exists (wu_1, u_2, u_3w') \bullet (v_1, v_2, v_3) = t$, ou si $\exists (u_1, u_2, u_3w) \bullet (w'v_1, v_2, v_3) = t$, ou si $\exists (wu_1, u_2, u_3) \bullet (v_1, v_2, v_3w') = t$, ou si $\exists (u_1, u_2, u_3) \bullet (wv_1, v_2, v_3w') = t$, alors $t = uv$. □

Il nous reste à montrer que ces "complétions" à gauche et à droite, c'est-à-dire le produit avec $(A^*)^L$ ou $(A^*)^R$, préservent la quasi-reconnaissabilité. Tout d'abord, on montre que cela préserve la reconnaissabilité par automate par une construction simple.

Lemme 5.3.3. *Soit $L \subseteq \mathcal{T}_0^+(A)$ un langage reconnu par un automate $\mathcal{A}$, il existe donc deux automates $\mathcal{A}_r$ et $\mathcal{A}_l$ reconnaissant respectivement $L \cdot (A^*)^R$ et $(A^*)^L \cdot L$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, K \rangle$ un automate reconnaissant un langage $L \subseteq \mathcal{T}_0^+(A)$, on définit $\mathcal{A}_l = \langle Q \cup \{\perp\}, \delta_l, K \rangle$ et $\mathcal{A}_r = \langle Q \cup \{\perp\}, \delta_r, K \rangle$, avec pour tout a,

$$\delta_l(a) = \delta(a) \cup \{(\perp, \perp), (\perp, q) \mid q \in Q\},$$
$$\delta_r(a) = \delta(a) \cup \{(\perp, \perp), (q, \perp) \mid q \in Q\}.$$

On voit que toute tuile de la forme $(a_1a_2 \ldots a_ku, v, w)$, avec $(u, v, w) \in L$, est reconnue par $\mathcal{A}_l$, par un calcul de la forme $\perp a_1 \perp a_2 \perp \ldots \perp a_k r$, r étant un calcul de $\mathcal{A}$ sur (u, v, w).

Réciproquement, tout calcul sur une tuile (u, v, w) par $\mathcal{A}_l$ est de la forme $\perp a_1 \perp a_2 \perp \ldots \perp a_k r$, où $a_1a_2 \ldots a_k$ est un préfixe de u, et r a un calcul sans $\perp$ sur (u', v, w) où $u = a_1a_2 \ldots a_ku'$, i.e. un calcul de $\mathcal{A}$ sur (u', v, w). Ainsi, si (u, v, w) est reconnu par $\mathcal{A}_l$, alors (u', v, w) est reconnu par $\mathcal{A}$, et donc $(u, v, w) \in (A^*)^L \cdot L$.

On montre de manière symétrique que $\mathcal{A}_r$ reconnaît $L \cdot (A^*)^R$. □

On peut maintenant montrer que ces "complétions" à gauche et à droite préservent la quasi-reconnaissabilité. On le montre en remarquant que les langages quasi-reconnaissables sont des combinaisons de langages clos par le haut reconnaissables par automates.

Lemme 5.3.4. *Soit $L \subseteq \mathcal{T}_0^+(A)$ un langage quasi-reconnaissable, alors les langages $(A^*)^L \cdot L$, $(A^*)^L \cdot L \cdot (A^*)^R$ et $L \cdot (A^*)^R$ sont quasi-reconnaissables.*

Démonstration. Soit $L \subseteq \mathcal{T}_0^+(A)$ un langage quasi-reconnaissable, alors L est une combinaison booléenne de langages reconnus par automate, donc une union finie de la forme $L = \bigcup_{i \in I} D_i \cap U_i$ telle que, pour tout $i \in I$, le langage quasi-reconnaissable U_i est clos par le haut et le langage quasi-reconnaissable D_i

est clos par le bas. Il en résulte $L \cdot (A^*)^R = \bigcup_{i \in I} D_i \cap U_i \cdot (A^*)^R$ puisque $D_i \cdot (A^*)^R = D_i$ pour tout langage D_i clos par le bas. On conclut en appliquant le lemme 5.3.3 qui montre que $U_i \cdot (A^*)^R$ est quasi-reconnaissable pour tout langage U_i clos par le haut ; le langage $L \cdot (A^*)^R$ est donc quasi-reconnaissable.

Par symétrie, le langage $(A^*)^L \cdot L$ est quasi-reconnaissable.

En appliquant successivement ces deux propriétés à L, on montre que le langage $(A^*)^L \cdot L \cdot (A^*)^R$ est quasi-reconnaissable. □

Théorème 5.3.5. *Soient deux langages quasi-reconnaissables $L_1, L_2 \subseteq \mathcal{T}_0^+(A)$, alors $L_1 \cdot L_2$ est quasi-reconnaissable.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe du lemme 5.3.2, du lemme 5.3.4, et du théorème 5.3.1. □

Conclusion

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité des travaux précédents sur les langages de tuiles, c'est à dire l'étude des sous-ensembles de monoïdes inversifs particuliers : le monoïde inversif libre dont les éléments sont des tuiles arborescentes et le monoïde de McAlister dont les éléments sont des tuiles linéaires.

Pour faire cela, nous avons présenté la notion de quasi-reconnaissabilité, c'est-à-dire la reconnaissabilité par prémorphismes de E-monoïdes, dans le cadre général des tuiles arborescentes. Le cas particulier des tuiles linéaires est alors développé un peu plus afin d'établir quels propriétés de clôtures supplémentaires.

Nous avons présenté une notion d'automates appropriés aux tuiles, et effectué une comparaison avec la notion de quasi-reconnaissabilité. Nous avons établi l'équivalence entre combinaisons booléennes de langages reconnus par automates et langages quasi-reconnaissables. On dispose à la fois d'un point de vue algébrique et d'un point de vue théorie des automates sur ces langages.

Pour l'étude du produit de langage de tuiles linéaires positives, nous avons développé une notion originale : le monoïde des décompositions restreintes, qui nous permet de démontrer, dans ce cas, la clôture des langages quasi-reconnaissables par produit.

Ces travaux laissent des perspectives dont la plus naturelle serait d'étudier les produits de langages quasi-reconnaissables de tuiles positives arborescentes. Autrement dit, on pourrait souhaiter étendre la preuve du résultat principal du chapitre 5 aux tuiles arborescentes.

Si l'on peut s'attendre à ce que le produit de langages de tuiles arborescentes positives quasi-reconnaissables soit également quasi-reconnaissable, dans ce cas, la preuve d'un tel résultat semble bien plus complexe. En particulier, généraliser aux bi-arbres la "complétion" du contexte à gauche et à droite effectuée dans le lemme 5.3.4 ne va pas de soi.

Naturellement, bien que nos points de départ, ancrés dans la représentation musicale, aient été les tuiles linéaires et les bi-arbres, on pourrait aussi étendre toutes les notions étudiées à des structures tuilées plus génériques comme celles de Kellendonk [1997] ou Stephen [1990]. Une adaptation de la notion d'automates cellulaires aux graphes à deux racines pourrait peut-être offrir le cadre de travail le plus adapté à une telle généralisation.

Bibliographie

DICKY, Anne et JANIN, David, 2013. Modélisation algébrique du diner des philosophes. Dans *Modélisation des Systèmes Réactifs (MSR), in Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA Volume 47 – no 1-2-3/2013)*.

DUBOURG, Etienne et JANIN, David, 2014. Algebraic tools for the overlapping tile product. Dans *8th International Conference on Language and Automata Theory and Applications (LATA)*, tome 8370 de *LNCS*, pages 335–346. springer, Madrid, Spain.

FOUNTAIN, John, 1977. A class of right pp monoids. *Quarterly Journal of Mathematics*, 28(3) :285–300.

FOUNTAIN, John, GOMES, Gracinda M. S. et GOULD, Victoria, 2009. The free ample monoid. *International Journal of Algebra and Computation*, 19(4) :527–554.

GREEN, James A., 1951. On the structure of semigroups. *Annals of Mathematics*, 54(1) :163–172.

JANIN, David, 2012. Quasi-recognizable vs MSO definable languages of one-dimensional overlapping tiles. Dans *Proceedings of Mathematical Foundation of Computer Science (MFCS)*, tome 7464 de *LNCS*, pages 516–528.

JANIN, David, 2013a. Algebras, automata and logic for languages of labeled birooted trees. Dans *International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, tome 7966 de *LNCS*, pages 318–329. Springer.

JANIN, David, 2013b. On languages of one-dimensional overlapping tiles. Dans *International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM)*, tome 7741 de *LNCS*, pages 244–256.

JANIN, David, 2013c. Overlapping tile automata. Dans A.A. Bulatov et A.M. Shur, rédacteurs, *The 8th International Computer Science Symposium in Russia (CSR)*, tome 7913 de *LNCS*, pages 431–443. Springer.

Janin, David, 2016. A robust algebraic framework for high-level music writing and programming. Dans *Second International Conference on Technologies for Music Notation and Representation (TENOR)*.

Janin, David, Berthaut, Florent et Desainte-Catherine, Myriam, 2013a. Multi-scale design of interactive music systems : the libTuiles experiment. Dans *Sound and Music Computing (SMC)*.

Janin, David, Berthaut, Florent, Desainte-Catherine, Myriam, Orlarey, Yann et Salvati, Sylvain, 2013b. The T-calculus : towards a structured programming of (musical) time and space. Dans *Workshop on Functional Art, Music, Modeling and Design (FARM)*. ACM Press.

Kellendonk, Johannes, 1997. The local structure of tilings and their integer group of coinvariants. *Communications in Mathematical Physics*, 187 :115–157.

Lawson, Mark V., 1991. Semigroups and ordered categories. I. the reduced case. *Journal of Algebra*, 141(2) :422 – 462.

Lawson, Mark V., 1998a. *Inverse Semigroups : The Theory of Partial Symmetries*, chapitre 9. World Scientific.

Lawson, Mark V., 1998b. McAlister semigroups. *Journal of Algebra*, 202(1) :276 – 294.

Margolis, Stuart W. et Meakin, John C., 1993. Inverse monoids, trees and context-free languages. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 335 :259–276.

Margolis, Stuart W. et Pin, Jean-Éric, 1984. Languages and inverse semigroups. Dans *icalp*, tome 172 de *LNCS*, pages 337–346.

McAlister, Donald B., 1973. Inverse semigroups which are separated over a subsemigroup. *Transactions of the American Mathematical Society*, 182 :85–117.

McAlister, Donald B., 1976. v-prehomomorphisms on inverse semigroups. *Pacific Journal of Mathematics*, 67 :215–231.

Munn, Walter D., 1974. Free inverse semigroups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 29(3) :385–404.

Nambooripad, K. S. Subramonian, 1980. The natural partial order on a regular semigroup. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, 23 :249–260.

Petrich, Mario, 1984. *Inverse semigroups.* Wiley.

PIN, Jean-Éric, 2011. Mathematical foundations of automata theory. Disponible sur : http://www.liafa.jussieu.fr/~jep/PDF/MPRI/MPRI.pdf.

PRESTON, Gordon B., 1954. Inverse semi-groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 29 (4) :396–403.

SCHEIBLICH, Herman E., 1972. Free inverse semigroups. *Semigroup Forum*, 4 :351–359.

SILVA, Pedro V., 1996. On free inverse monoid languages. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications - Informatique Théorique et Applications*, 30(4) :349–378.

STEPHEN, Joseph B., 1990. Presentations of inverse monoids. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 63 :81–112.

WAGNER, Viktor V., 1952. Generalized groups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 84 :1119–1122.